Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Soluzioni relative all'esercitazione scritta di
LOGICA PER L'INFORMATICA
14 gennaio 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

$$t \ ::= \ x \mid c \mid f^n(t_1, \ldots, t_n)$$
$$F \ ::= \ \bot \mid \top \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \Rightarrow F \mid \neg F \mid P^n(t_1, \ldots, t_n) \mid \forall x.F \mid \exists x.F$$

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F della logica proposizionale, restituisca `true` se F non contiene congiunzioni e `false` altrimenti.

$f(\bot) = \texttt{true}$
$f(\top) = \texttt{true}$
$f(A) = \texttt{true}$
$\ldots$
$f(\neg F) = f(F)$
$f(F_1 \wedge F_2) = \texttt{false}$
$f(F_1 \vee F_2) = f(F_1)\ \&\&\ f(F_2)$
$f(F_1 \Rightarrow F_2) = f(F_1)\ \&\&\ f(F_2)$

3 (1 punto). Dare le definizioni di connotazione, denotazione e semantica.

Connotazione: forma sintattica usata per indicare una denotazione; il come ci si riferisce a una denotazione.

Denotazione: oggetto semantico del quale si parla attraverso le connotazioni; ciò a cui ci si riferisce.

Semantica: operazione che associa a ogni connotazione la sua denotazione. Connotazioni distinte possono avere la stessa semantica.

4 (1 punto). Dare la definizione di formula soddisfacibile in logica proposizionale classica e mostrare un esempio di formula soddisfacibile e un esempio di formula insoddisfacibile. Motivare la risposta.

Una formula F è soddisfacibile sse esiste un mondo v tale che $[\![F]\!]^v = 1$.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica.

Per ogni formula F e contesto Γ, se $\Gamma \Vdash F$ (in logica proposizionale classica) allora $\Gamma \vdash F$ (usando le regole della deduzione naturale classica).

6 (1 punto). Dimostrare la correttezza locale delle regole di introduzione ed eliminazione della congiunzione.

Regola di introduzione: $\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B} \wedge_i$

Correttezza locale: bisogna dimostrare $A, B \Vdash A \wedge B$ ovvero che in ogni mondo v tale che $[\![A]\!]^v = [\![B]\!]^v = 1$ si ha $[\![A \wedge B]\!]^v = \min\{[\![A]\!]^v, [\![B]\!]^v\} = 1$. Ovvio.

Regola di eliminazione 1: $\dfrac{A \wedge B}{A} \wedge_{e_1}$

Correttezza locale: bisogna dimostrare $A \wedge B \Vdash A$ ovvero che in ogni mondo v tale che $[\![A \wedge B]\!]^v = \min\{[\![A]\!]^v, [\![B]\!]^v\} = 1$ si ha $[\![A]\!]^v = [\![B]\!]^v = 1$. Ovvio.

Per l'altra regola di eliminazione si procede nello stesso modo.

7 (2 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(\bot) = \top, \quad f(\top) = \bot, \quad f(A) = \neg A, \quad f(F_1 \vee F_2) = f(F_1) \wedge f(F_2)$
il cui dominio sono le formule che non contengono congiunzioni, negazioni e implicazioni.

(a) Quali connettivi non possono apparire nel codominio della funzione?

Implicazioni e disgiunzioni non possono apparire.

(b) Dimostrare, per induzione strutturale su una formula F, che $\neg f(F) \equiv F$.

Procediamo per induzione su F. Caso $\bot$: dimostriamo $\neg f(\bot) \equiv \bot$. Si ha $\neg f(\bot) = \neg\top$ che è logicamente equivalente a $\bot$.

Il caso $\top$ è analogo.

Caso A: dimostriamo $\neg f(A) \equiv A$. Si ha $\neg f(A) = \neg\neg A$ che è equivalente ad A in logica classica.

Caso $F_1 \vee F_2$: per ipotesi induttiva sappiamo $\neg f(F_1) \equiv F_1$ e $\neg f(F_2) \equiv F_2$. Dimostriamo $\neg f(F_1 \vee F_2) \equiv F_1 \vee F_2$. Si ha $\neg f(F_1 \vee F_2) = \neg(f(F_1) \wedge f(F_2)) \equiv \neg f(F_1) \vee \neg f(F_2)$ per la legge di De Morgan. Dalle ipotesi induttive segue quanto volevamo dimostrare.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se c'e' vita c'e' speranza
(b) Se quando c'è vita tutto va al meglio allora ci si accontenta di poco
(c) O non vi è speranza o tutto va alla grande
(d) Quindi ci si accontenta di poco

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

Formalizzazione:
(a) $V \to S$
(b) $(V \to M) \Rightarrow P$
(c) $\neg S \vee M$
(d) P

$$\dfrac{(V \to M) \Rightarrow P \qquad \dfrac{\dfrac{\neg S \vee M \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg S] \qquad \dfrac{V \Rightarrow S \qquad [V]}{S}\Rightarrow_e}{\bot}\neg_e}{M}\bot_e \qquad [M]}{M}\vee_e}{V \to M}\Rightarrow_i}{P}\Rightarrow_e$$

9 (2 punti). Si consideri la seguente strofa di una nota canzoncina per bambini: "*C'eran due nel letto e il più piccolo ha detto:* sto stretto, sto stretto". Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine cercando di essere il più fedeli possibili nella formalizzazione.

$$\exists x.\exists y.(x \neq y \wedge P(x, y) \wedge D(x))$$

dove $P(x, y)$ sta per x *è più piccolo di* y e $D(x)$ per x *dice* sto stretto, sto stretto.

10 (2 punti). Dimostrare in deduzione naturale la seguente legge di De Morgan

$$\neg\exists x.P(x) \vdash \forall x.(\neg P(x))$$

$$\dfrac{\neg\exists x.P(x) \qquad \dfrac{[P(y)]}{\exists x.P(x)}\,\exists_i}{\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg P(y)}\,\neg_i}{\forall x.\neg P(x)}\,\forall_i}$$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:

1) $\forall x.\neg P(x,x)$
2) $\forall x,y.(P(x,y) \to P(y,x))$
3) $\exists x,y.(P(x,c) \wedge P(c,y) \wedge \neg P(x,y))$
4) $\forall x,y,z.x = y \to P(x,z) \to P(y,z)$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti di cui uno numerico, uno su oggetti e uno su alberi genealogici. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

A	$I(P)$	$I(c)$
$\mathbb{N}$	$I(P)(x,y) = (x \neq y)$	0
oggetti alberi genealogici	avere diverso colore non avere discendenti in comune	un oggetto qualsiasi un individuo che ha avuto figli con compagni diversi che non hanno un figlio in comune

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali = sia interpretata come uguaglianza.

a) $\exists x,y.(\neg x = y \wedge \neg x = c \wedge \neg y = c)$
b) $\forall x,y,z.(P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))$
c) $\exists d.\forall x.\neg P(x,d)$
d) $\exists d.\neg c = d$