Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
19 luglio 2013

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F contenente solamente congiunzioni e disgiunzioni, $\bot$, $\top$ e atomi, ritorna la sua formula duale

3 (1 punto). Dare la definizione di connettivo

4 (1 punto). Dare la definizione di tautologia in logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Enunciare i teoremi di completezza forte e debole per la logica proposizionale classica

6 (1 punto). Enunciare il teorema di compattezza per la logica proposizionale. Spiegare perchè il teorema di compattezza è un prerequisito della completezza forte.

7 (3 punti). Dimostrare per induzione su F, formula generate dalla grammatica $F ::= \bot \mid \top \mid A \mid F \wedge F$, che $\Vdash F$ sse $\Vdash F[\bot/A]$ e $\Vdash F[\top/A]$

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Non è possibile che l'Italia abbia agito correttamente e o il Kazakistan non abbia agito con un secondo fine o la donna non fosse la moglie di un dissidente
(b) L'Italia agisce correttamente se quando la richiesta di asilo viene soddisfatta allora la donna è moglie di un dissidente
(c) quindi o la richiesta di asilo è stata soddisfatta oppure il Kazakistan ha agito con un secondo fine.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale classica.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza:
"*Quando uno si arricchisce, più di uno si impoverisce*".
Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine.

11 (3 punto). Per ognuna delle seguenti equazioni della forma $F \equiv G$, dire se essa vale o meno. Nel caso in cui non valga, mostrare un controesempio. Nel caso in cui valga, dimostrare in deduzione naturale sia $F \vdash G$ che

$G \vdash F$.
(a) $\forall x.(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x.P(x)) \land (\forall x.Q(x))$
(b) $\forall x.(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\forall x.P(x)) \lor (\forall x.Q(x))$
(c) $\exists x.(P(x) \land Q(x)) \equiv (\exists x.P(x)) \land (\exists x.Q(x))$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:

1) $\forall x, y.f(g(x), g(y)) = g(f(x, y))$
2) $\forall x.\neg g(x) = x$
3) $\forall y.\exists x.g(x) = y$

Per tutta la durata dell'esercizio considerare solamente modelli nei quali l'uguaglianza venga interpretata come uguaglianza. Si assumano inoltre le seguenti due regole di inferenza per l'ugugaglianza:

$$\frac{t_1 = t_2}{t_2 = t_1}\,\texttt{sym} \qquad \frac{t_1 = t_2 \quad t_2 = t_3}{t_1 = t_3}\,\texttt{trans}$$

(a) Fornire due modelli distinti di cui uno numerico e uno non numerico.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata.

a) $\forall x, y.f(x, y) = f(y, x)$
b) $\forall x.\exists y.f(x, x) = g(f(y, y))$
c) $\forall x.f(g(x), g(x)) = f(x, x)$
d) $\forall x, y.g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$