Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
5 luglio 2013

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva sulle formule della logica proposizionale che determini se la formula sia priva di negazioni e implicazioni.

3 (1 punto). Dare la definizione di forma normale disgiuntiva.

4 (1 punto). Spiegare perchè le tabelle di verità non possono essere utilizzate per studiare la semantica della logica del prim'ordine.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per le logiche proposizionali classica e intuizionista, mettendo bene in rilievo le differenze.

6 (1 punto). Dare la definizione di regola derivabile per la deduzione naturale.

7 (3 punti). Considerare la grammatica $F ::= F \wedge F \mid A \mid \top$. Dimostrare, per induzione su F, che F è non tautologica sse $FV(F) = \{A\}$.

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se la Francia ha già approvato i matrimoni omossesuali e l'Italia lo farà, allora il Vaticano protesterà
(b) O il Vaticano non protesterà oppure la Francia non ha approvato i matrimoni fra individui dello stesso sesso
(c) Se l'Italia approverà i matrimoni omosessuali, allora la Francia l'ha sicuramente già fatto
(d) Quindi l'Italia non lo farà

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale classica.

9 (1 punto). Si consideri la seguente sentenza: "*Se c'è un figlio, ci sono sicuramente suo padre e sua madre*"

Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine.

10 (1 punto). Mettere la seguente formula in forma normale disgiuntiva:

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(\neg A \vee B)$$

11 (2 punti). Dire sotto quali condizioni la formula ottenuta da F rimpiazzando la sottoformula $\forall x.G$ con $\forall y.G[y/x]$ è logicamente equivalente a F.

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:

1) $\forall x.f(g(x)) = g(f(x))$
2) $\forall x.g(f(x)) = f(x)$
3) $\exists z.\neg f(x) = x$
4) $\forall x.f(f(x)) = f(x)$

Nel seguito dell'esercizio l'uguaglianza deve essere interpretata come tale in ogni modello.

(a) Fornire almeno un modello numerico e almeno uno il cui dominio siano figure geometriche.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza. Inoltre, nella ricerca di prove, sono date le seguenti regole di derivazione per l'uguaglianza (e solo queste):

$$\frac{x = y \quad y = z}{x = z}\,(trans) \qquad \frac{x = y}{y = x}\,(sym)$$

a) $\forall x.g(x) = x$
b) $\exists y.\forall x.f(x) = g(x)$
c) $\exists x.\neg f(x) = f(g(x))$
d) $\forall x.f(g(f(x))) = f(g(x))$