Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
07 giugno 2013

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale

2 (1 punto). Usando solamente funzioni non ricorsive e funzioni ricorsive strutturali, scrivere un programma che, data una formula proposizionale F, ritorni `true` sse nella formula occorrono più A che B

3 (1 punto). Dare la definizione di insieme funzionalmente completo di connettivi

4 (1 punto). Dare la definizione di equivalenza logica

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza per la deduzione naturale per la logica proposizionale classica

6 (1 punto). Dimostrare la correttezza locale delle regole $\wedge_I$ e $\wedge_{e_1}$.

7 (3 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(F_1 \wedge F_2) = f(F_2) \wedge f(F_1)$
$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad \ldots$
$f(\neg F) = \neg f(F)$
il cui dominio sono le formule ottenute solo da congiunzioni, negazioni e atomi. Per ogni F dimostrare, per induzione strutturale su F, che $f(F) \equiv F$.

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Quante lamentele: la nave non è accogliente o i passeggeri sono troppo esigenti
(b) Se la pulizia è scarsa allora la nave non è accogliente
(c) Se la crociera disgusta quel raffinato di Luca, allora la pulizia è scarsa o almeno i passeggeri sono poco esigenti
(d) Quindi stranamente o la nave non è accogliente o Luca non ne è disgustato

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale classica.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza:

"*Solo uno dei due fratelli ha avuto un figlio*"

Formalizzare nel modo più accurato possibile la sentenza in logica del prim'ordine.

10 (1 punto). Mettere la seguente formula in forma normale disgiuntiva:

$$\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \wedge A$$

11 (3 punti). Partizionare le seguenti formule in classi di equivalenza logica:
(a) $(\forall x.\, P(x)) \Rightarrow \exists y.\, Q(x,y)$
(b) $\exists y, w.\, (P(w) \Rightarrow Q(x,y))$
(c) $\forall w.\exists y.\, (P(w) \Rightarrow Q(x,y))$
(d) $\exists y, w.\, (P(y) \Rightarrow Q(x,w))$
(e) $(\forall x.\, P(x)) \Rightarrow \exists y.\, Q(y,x)$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x, y. x \cdot y = y \cdot x \cdot y$
2) $\forall x. \exists y. x \neq x \cdot y$
3) $\forall x, y, z. x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

Nel corso dell'esercizio tutti i modelli debbono interpretare $=$ usando l'uguaglianza.

(a) Fornire almeno due modelli distinti di cui almeno uno numerico e uno insiemistico.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un modello che non soddisfi la formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un modello che soddisfi la formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata.
a) $\neg \exists x. \forall w.\, x = w \cdot x \cdot w$
b) $\forall x, y.\, x \cdot y = y \cdot x$
c) $\forall z.\, z \cdot z = z$