Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
21 febbraio 2013

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F contenente solamente $\bot, \land$ e atomi, ritorni la formula logicamente equivalente alla F ottenuta rimpiazzando ogni sottoformula che contiene un $\bot$ con $\bot$.

3 (1 punto). Dare la definizione di forma normale congiuntiva. Mostrare due formule logicamente equivalenti ma distinte che siano entrambe in forma normale congiuntiva.

4 (1 punto). Dare la definizione di regola di inferenza (localmente) corretta.

5 (1 punto). Enunciare le regole di DeMorgan per i quantificatori.

6 (1 punto). Dimostrare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica ristretta alle sole regole di introduzione ed eliminazione della congiunzione.

7 (3 punti). Dimostrare, per induzione strutturale su F, formula della logica proposizionale ristretta ai casi $\land, \top$ e atomi, che se G è una tautologia allora F in cui rimpiazzo ogni occorrenza di G con $\top$ è ancora una tautologia.

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Non è vero che Berlusconi e Bersani non vinceranno
(b) Se non vincerà Monti non vincerà nemmeno Bersani
(c) quindi se non vincerà Berlusconi allora vincerà Monti

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "Colui che rende servizi alla patria ne verrà ricompensato ma diventerà un eroe solamente se è stato il solo".

10 (1 punto). Trovare la forma normale disgiuntiva che corrisponde alla seguente

tabella di verità:

A	B	
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

11 (2 punto). Quali di queste affermazioni sono vere e quali false:
(a) Una variabile libera in una formula occorre libera in tutte le sue sottoformule
(b) Una variabile legata in una formula è legata in almeno una sua sottoformula
(c) Una variabile può occorrere sia libera che legata in una stessa formula
(d) Una variabile libera può occorrere zero, una o più volte in una formula

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x, y. x \leq m(x, y) \wedge y \leq m(x, y)$
2) $\forall x, y, z. z \leq z \wedge y \leq z \Rightarrow m(x, y) \leq z$
3) $\forall x. x \leq x$
4) $\forall x, y, z. x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(a) Fornire tre modelli distinti di cui uno numerico, uno insiemistico e uno di cardinalità finita.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata.
a) $\forall x. x \leq m(x, x) \wedge m(x, y) \leq x$
b) $\forall x, x', y. m(x, y) \leq m(x', y) \Rightarrow x \leq x'$
c) $\forall x, x', y. x \leq x' \Rightarrow m(x, y) \leq m(x', y)$
d) $\exists x, y. \neg(m(x, y) \leq m(y, x))$