Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
16 gennaio 2013

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che conti il numero di sottoformule che non contengono A in una formula generata dalla grammatica $F ::= \bot \mid A \mid F \wedge F \mid F \vee F$. Contare più volte sottoformule uguali in posizioni distinte. Esempio: $f(A \wedge (\bot \vee \bot)) = 3$, il multiinsieme delle sottoformule in posizioni distinte è $\{\bot, \bot, \bot \vee \bot\}$.

3 (1 punto). Dare la definizione di connettivo.

4 (1 punto). Dare la definizione di soddisfacibilità in logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Enunciare i teoremi di completezza forte e debole per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dare la definizione di regola invertibile. Classificare le regole di introduzione ed eliminazione della congiunzione rispetto alla loro invertibilità. Motivare la risposta.

7 (3 punti). Considerare la grammatica $F ::= F \vee F \mid A \mid \bot$. Dimostrare, per induzione su F, che F è soddisfacibile sse $FV(F) = \{A\}$. Il risultato continua a valere se F può contenere congiunzioni? E se può contenere $\bot$? In caso positivo estendere la prova; in caso negativo fornire un controesempio.

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se la befana non porta il carbone allora il bimbo è stato buono
(b) Non è vero che il bimbo è stato buono e babbo natale non gli ha portato alcun regalo
(c) Quindi o la befana porta il carbone oppure babbo natale porta un regalo

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale classica.

9 (1 punto). Si consideri la seguente sentenza: "*C'è chi ha avuto un solo compagno, chi non ne ha mai avuti e chi ne ha avuti diversi*".
Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine.

10 (1 punto). Mettere la seguente formula in forma normale disgiuntiva:

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(B \vee \neg A)$$

11 (2 punti). Mostrare quattro formule F con una sottoformula G per ognuna tali che:

(a) x occorra libera in G e in F e anche legata in G

(b) x occorra libera in G, ma non occorra libera in F

(c) x sia legata da F in G e non occorra libera in F

(d) x sia legata da F in G e occorra libera in F

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x.x \cdot x = x$
2) $\exists z.\forall x.x \cdot z = z$
3) $\forall x.u \cdot x = x$

(a) Fornire almeno un modello di cardinalità finita e uno di cardinalità infinita. L'uguaglianza deve essere interpretata come uguaglianza.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza. Considerare inoltre la seguenti regole di transività per l'uguaglianza: $\frac{x=y \quad x=z}{y=z}$

a) $\forall x, y.x \cdot y = y \cdot x$
b) $\forall u'.((\forall x.x \cdot u' = x) \Rightarrow u = u')$
c) $\exists x, y.x \neq y$