# Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
17 settembre 2012

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere una funzione ricorsiva su $F$ che rimuova le doppie negazioni (es: $A \wedge \neg\neg(B \vee \neg C) \mapsto A \wedge (B \vee \neg C)$)

3 (1 punto). Dare la definizione di correttezza locale di una regola di inferenza della deduzione naturale proposizionale.

4 (1 punto). Mostrare un insieme irridondante formato da due connettivi funzionalmente completi e dimostrarlo tale.

5 (1 punto). Scrivere le regole di introduzione ed eliminazione del quantificatore esistenziale.

6 (1 punto). Dare la definizione di forma normale disgiuntiva.

7 (3 punti). Considerare formule della logica proposizionale che contengano solamente congiunzioni, implicazioni e atomi.

(a) Scrivere una funzione ricorsiva strutturale $f(\cdot)$ che rimpiazzi l'implicazione più esterna $F \Rightarrow G$ con $F \wedge P \Rightarrow G \wedge Q$ con $P, Q$ fissate. Esempio: $A \wedge (F \Rightarrow (X \Rightarrow Y)) \mapsto A \wedge (F \wedge P \Rightarrow (X \Rightarrow Y) \wedge Q)$

(b) Dimostrare, per induzione strutturale su $F$, che se $P \Vdash Q$ allora $F \Vdash f(F)$

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
1) senza energie fossili si ricorre alle rinnovabili o non si produce più
2) se si usano le rinnovabili non si usa il nucleare
3) con il nucleare si può produrre
dunque 4) o non si usa il nucleare o si usano energie fossili.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "*Esattamente tre degli invitati non sono fedeli e fra di essi non c'è Alcindoro*" Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine.

10 (1 punto). Trovare la forma normale congiuntiva che corrisponde alla seguente tabella di verità usando l'algoritmo visto a lezione:

| $A$ | $B$ | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

Esiste una forma normale disgiuntiva equivalente ma più piccola?

11 (3 punti). Sia data la seguente formula $F$:

$$\forall x, \exists y, (P(x,y) \Rightarrow \exists x, Q(z,x))$$

Sia $J$ la sottoformula $Q(z,x)$ e $I$ la sottoformula che è un'implicazione.
Calcolare:
a) le variabili libere di $F$ e di $I$
b) le varibili legate da $F$ in $I$
c) le varibili legate da $F$ in $J$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x.r(t(x)) = t(r(x))$
2) $\forall x.t(t(x)) = t(x)$
3) $\forall x.r(x) \neq x$
4) $\exists x.t(x) \neq x$

(a) Fornire almeno due modelli distinti di cui uno su numeri e uno su figure geometriche colorate. L'uguaglianza deve essere interpretata come uguaglianza in tutti i modelli.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza. Considerare inoltre il seguente assioma di transitività per l'uguaglianza: $\forall x, y, z.x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z$
a) $\forall x.t(x) \neq x$
b) $\forall x.r(r(x) = x$
c) $\exists x.r(x) \neq t(x)$