Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
03 settembre 2012

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F contenente solamente congiunzioni e disgiunzioni, $\bot$, $\top$ e atomi, ritorna la sua formula duale

3 (1 punto). Calcolare il numero di connettivi ternari, spiegando come é stato fatto il calcolo

4 (1 punto). Dare la definizione di insoddisfacibilità in logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Enunciare i teoremi di completezza forte e debole per la logica del prim'ordine classica

6 (1 punto). Dare la definizione di regola invertibile. Classificare le regole di introduzione ed eliminazione della congiunzione rispetto alla loro invertibilità. Motivare la risposta.

7 (3 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(F_1 \wedge F_2) = f(F_1)$
$f(F_1 \vee F_2) = f(F_1) \vee f(F_2)$
$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad \ldots$
$f(\bot) = \bot, \quad f(\top) = \top$
il cui dominio sono le formule prive di negazioni e implicazioni.

(a) Calcolare $f((A \wedge B) \vee ((C \vee D) \wedge E))$

(b) Dimostrare, per induzione strutturale su F, che per ogni F e G si ha che $f(F) \Vdash G$ implica $F \Vdash G$

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Quando Maria sente molto umido o ha molto caldo, allora o soffre in città oppure scappa al mare
(b) Quando Maria soffre in città allora stai certo che sente molta umidità
(c) Maria è strana: non è mai al mare quando fa molto caldo
(d) Quindi se Maria sente molto caldo allora sente sempre anche molto umido

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale classica.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "*C'è un solo amico di Paolo che quando si impegna ottiene qualcosa*".
Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine.

10 (1 punto). Mettere la seguente formula in forma normale disgiuntiva:

$$(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg(B \vee \neg A)$$

11 (3 punti). Partizionare le seguenti formule in classi di equivalenza logica:
(a) $(\exists w.Q(w)) \vee Q(w)$
(b) $\neg(\neg Q(w) \wedge \forall y.\neg Q(y))$
(c) $\neg\forall z.(\neg Q(z) \wedge \neg Q(w))$
(d) $\forall y.(Q(y) \wedge Q(w))$
(e) $\exists y.(Q(w) \vee Q(y))$
(f) $\neg\forall y.(\neg Q(w) \wedge \neg Q(z))$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x, y.(P(f(x), y) \Rightarrow P(x, g(y))$
2) $\forall x.P(f(f(x)), f(x))$
3) $\exists x.\neg P(g(x), f(x))$
4) $\forall x.P(g(x), g(x))$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti di cui almeno uno interpreti P con la relazione di divisibilità.
(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza. Considerare inoltre le seguenti regole per l'uguaglianza: $\frac{x=y \quad Q(x)}{Q(y)}$ per ogni predicato Q (esempio per $Q(x) = P(z, f(x))$
a) $\forall x.\exists y.P(x, y)$
b) $\exists x.\forall y.P(f(x), g(y))$
c) $\forall x, y.(P(x, y) \Rightarrow P(y, x))$
d) $\forall x.f(x) = g(x)$