Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
07 luglio 2012

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F, ritorna l'insieme delle formule atomiche di F.

3 (1 punto). Dare la definizione di forma normale disgiuntiva. Elencare tutte le formule distinte (a meno di nomi degli atomi) in forma normale disgiuntiva che non contengano più di un connettivo.

4 (1 punto). Dare le definizioni di equivalenza logica in logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica

6 (1 punto). Dimostrare la correttezza locale in logica classica della regola di eliminazione del not ($\neg$).

7 (3 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(F_1 \Rightarrow F_2) = (f(F_1) \wedge A \Rightarrow f(F_2) \wedge B)$,
$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad \ldots, \quad f(F_1 \wedge F_2) = f(F_1) \wedge f(F_2)$
il cui dominio sono le formule che contengono atomi, congiunzioni e implicazioni.

(a) Calcolare $f(B \Rightarrow (A \Rightarrow A))$

(b) Dimostrare, per induzione strutturale su F, che se $A \Vdash B$ allora $F_1 \Vdash f(F_1)$.

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Uno dei due Mario ha segnato
(b) Se Balotelli ha segnato allora gli italiani sono felici
(c) Monti non ha segnato se la Merkel esulta
(d) quindi se gli italiani sono affranti almeno anche la Merkel non gioisce

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale intuizionista.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "*Se c'è qualcuno su quest'isola, non è sicuramente il solo*".
Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine usando un solo predicato oltre a quello di uguaglianza.

10 (1 punto). Trovare la forma normale congiuntiva che corrisponde alla seguente tabella di verità:

A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

11 (3 punti). Partizionare le seguenti formule in classi di equivalenza logica:
(a) $\neg(\neg P(x) \wedge \forall y.\neg P(y))$
(b) $(\exists x.P(x)) \vee P(x)$
(c) $\forall y.(P(y) \wedge P(x))$
(d) $\exists y.(P(x) \vee P(y))$
(e) $\neg\forall z.(\neg P(z) \wedge \neg P(x))$
(f) $\neg\forall y.(\neg P(x) \wedge \neg P(z))$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x.x \leq f(x)$
2) $\forall x.f(x) = f(f(x))$
3) $\forall x, y.(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$
4) $\forall x.\exists y, \neg(x \leq g(y))$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti di cui almeno due in cui $I(f)$ non sia l'identità. L'uguaglianza deve essere interpretata come uguaglianza in tutti i modelli.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza. Considerare inoltre le seguenti regole per l'uguaglianza: $\frac{x=y \quad P(x)}{P(y)}$ per ogni predicato P e $\frac{x=y}{y=x}$.
a) $\forall x.f(x) \leq f(f(x))$
b) $\forall x.f(f(x) \leq f(x)$
c) $\forall x.f(x) \leq x$
d) $\exists x.\forall y, \neg(x \leq y)$