Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
08 giugno 2012

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F, restituisce true se F non contiene negazioni e implicazioni e false altrimenti.

3 (1 punto). Dare la definizione di insieme funzionalmente completo di connettivi.

4 (1 punto). Dare le definizioni di formula insoddisfacibile in logica proposizionale classica

5 (1 punto). Enunciare il teorema di compattezza per la logica proposizionale classica

6 (1 punto). Dimostrare il teorema di completezza debole potendo usare i teoremi di di correttezza, deduzione sintattica/semantica e completezza "superdebole" (ovvero per ogni F, $\Vdash F \iff \vdash F$)

7 (2 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(\bot) = \top,\quad f(\top) = \bot,\quad f(A) = \neg A,\quad f(F_1 \land F_2) = f(F_1) \lor f(F_2)$
il cui dominio sono le formule che non contengono disgiunzioni, negazioni e implicazioni.

(a) Determinare il più precisamente possibile il codominio della formula

(b) Dimostrare, per induzione strutturale su una formula F, che $\neg f(F) \equiv F$.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) I Maya non avevano ragione o il mondo sta per finire
(b) Il mondo non sta per finire se non possiamo dormire tranquilli
(c) quindi se i Maya avevano ragione allora possiamo dormire tranquilli (per sempre. . .)

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "*Nessun marito non ha mogli*". Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine usando due predicati, uno unario ("essere marito") e uno binario ("sposato con").

10 (1 punto). Trovare la forma normale disgiuntiva che corrisponde alla seguente tabella di verità:

A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

11 (3 punti). Partizionare le seguenti formule in classi di equivalenza logica:
(a) $(\forall x.P(x)) \wedge P(x)$
(b) $\neg(\neg P(x) \vee \exists y.\neg P(y))$
(c) $\neg\exists y.(\neg P(x) \vee \neg P(z))$
(d) $\neg\exists z.(\neg P(z) \vee \neg P(x))$
(e) $\forall y.(P(x) \wedge P(y))$
(f) $\exists y.(P(y) \vee P(x))$

12 (9 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x.\neg P(x, x)$
2) $\forall x, y, z.(P(x, y) \Rightarrow P(y, z) \Rightarrow P(x, z))$
3) $\exists x.\forall y.\neg P(y, x)$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza.
a) $\forall x, y.(P(x, y) \Rightarrow \neg P(y, x)$
b) $\exists x.\forall y.P(x, y)$
c) $\forall x, y.(P(x, y) \vee P(y, x) \vee x = y)$