Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LINGUAGGI
Teoria — 16 gennaio 2009

1. Dare la sintassi per le formule della logica del primo ordine

   Risposta:

$$
\begin{array}{rcl}
< F > & ::= & < F > \wedge < F > \\
 & | & < F > \vee < F > \\
 & | & < F > \Rightarrow < F > \\
 & | & \bot \\
 & | & \top \\
 & | & \forall x. < F > \\
 & | & \exists x. < F > \\
 & | & P^n(< t_1 >, \ldots, < t_n >) \\
< t > & ::= & c \\
 & | & x \\
 & | & f^n(< t_1 >, \ldots, < t_n >)
\end{array}
$$

   ove P^n, f^n e c rappresentano rispettivamente un predicato n-ario, un simbolo di funzione n-aria e una costante prese da un linguaggio del primo ordine.

2. Dare la definizione di conseguenza logica per il calcolo proposizionale

   Risposta: sia Γ un insieme di formule e F una formula data. F é conseguenza logica di Γ (in simboli $\Gamma \Vdash F$) se per ogni valutazione v tale che per ogni formula G in Γ si ha $[\![G]\!]^v = 1$, si ha $[\![F]\!]^v = 1$

3. Dare la definizione di insieme funzionalmente completo di connettivi

Risposta: un insieme Δ di connettivi si dice funzionalmente completo quando è possibile esprimere qualunque altro connettivo usando solamente connettivi di Δ.

4. Definire le nozioni di formula in forma normale prenessa e di Skolem

   Risposta: una formula è in forma normale prenessa quando è della forma $Q_1.\ldots.Q_n.M$ dove Q_i è un connettivo esistenziale o universale e la formula M (detta matrice) è priva di connettivi. Una formula in forma normale prenessa è in forma normale di Skolem quando non vi compaiono connettivi esistenziali.

5. Scrivere la regola di risoluzione per il calcolo proposizionale

   Risposta:

$$\frac{C_1 \qquad C_2}{C_1 \setminus \{F\} \cup C_2 \setminus \{\neg F\}}$$

   sotto la condizione $F \in C_1$ e $\neg F \in C_2$.

6. Identificare nella seguente mappa di Karnaugh l'insieme di tutti gli implicanti, quello di tutti gli implicanti primi e quello di tutti gli implicanti primi essenziali. Gli implicanti debbono essere indicati con la formula congiuntiva che li caratterizza universalmente

AB/CD	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	1	0	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

   Risposta:

   - Implicanti:
     $AB\bar{C}\bar{D}, A\bar{B}\bar{C}\bar{D}, \bar{A}\bar{B}\bar{C}D, \bar{A}B\bar{C}D, \bar{A}\bar{B}CD, \bar{A}\bar{B}C\bar{D}, ABC\bar{D}, ABCD$
     $A\bar{C}\bar{D}, \underline{\bar{A}\bar{C}D}, \underline{\bar{A}\bar{B}D}, \underline{\bar{A}\bar{B}C}, AC\bar{D}, AB\bar{D}, A\bar{B}\bar{D}, \underline{A\bar{D}}$
   - Gli implicanti primi sono quelli sottolineati
   - L'unico implicante primo non essenziale è $\bar{A}\bar{B}D$

7. Enunciare il teorema di completezza per la deduzione naturale per la logica proposizionale classica

   Risposta: per ogni insieme di formula Γ e per ogni formula F se $\Gamma \Vdash F$ allora $\Gamma \vdash_{RAA} F$

8. Dimostrare il teorema di correttezza per la deduzione naturale per la logica proposizionale classica, limitandosi alle regole per gli atomi, il $\top$ e la congiunzione

   Risposta: dimostriamo per induzione su $\Gamma \vdash F$ che $\Gamma \Vdash F$

   Caso $A \in \Gamma$: per dimostrare $\Gamma \Vdash A$ in quanto $A \in \Gamma$ e per definizione di conseguenza logica.

   Caso $\frac{}{\top}$: si ha $\Gamma \Vdash \top$ per definizione di conseguenza logica.

   Caso $\frac{F_1 \quad F_2}{F_1 \wedge F_2}$: per ipotesi induttiva $\Gamma \Vdash F_1$ e $\Gamma \Vdash F_2$; quindi, per ogni valutazione v in cui per ogni formula G in Γ vale $\llbracket G \rrbracket^v = 1$, si ha $\llbracket F_1 \rrbracket^v = 1$ e $\llbracket F_2 \rrbracket^v = 1$. Quindi $\llbracket F_1 \wedge F_2 \rrbracket^v = 1$.

   Caso $\frac{F_1 \wedge F_2}{F_i}$: per ipotesi induttiva $\Gamma \Vdash F_1 \wedge F_2$, ovvero per ogni valutazione v in cui per ogni formula G in Γ vale $\llbracket G \rrbracket^v = 1$, si ha $\llbracket F_1 \wedge F_2 \rrbracket^v = 1$ e in particolare $\llbracket F_i \rrbracket^v = 1$.

9. Sia F una formula proposizionale in cui possano comparire solo $\bot$, $\top$, atomi e congiunzioni. Dimostrare, per induzione su F, che se F é una tautologia allora in F non occorrono atomi e $\bot$.
   ATTENZIONE: É diverso dall'assumere che F sia una tautologia E POI andare per induzione

   Risposta: dimostriamo per induzione su F che se $\Vdash F$ allora $P(F)$ dove la proprietà P è quella di non contenere $\bot$ e atomi.

   Caso $\top$: si ha $\Vdash \top \Rightarrow P(\top)$ in quanto $P(\top)$

   Caso $\bot$: si ha $\Vdash \bot \Rightarrow P(\bot)$ in quanto $\neg \Vdash \bot$

   Caso A: si ha $\Vdash A \Rightarrow P(A)$ in quanto $\neg \Vdash A$

   Caso $F_1 \wedge F_2$: si ha $\Vdash F_1 \wedge F_2 \Rightarrow P(F_1 \wedge F_2)$ in quanto:

   > $\Vdash F_1 \wedge F_2$ implica $\Vdash F_1$ e $\Vdash F_2$ per definizione di $\Vdash$ e le proprietà della funzione minimo;
   >
   > per ipotesi induttiva, $\Vdash F_1 \Rightarrow P(F_1)$ e $\Vdash F_2 \Rightarrow P(F_2)$;
   >
   > quindi $P(F_1)$ e $P(F_2)$;
   >
   > da cui $P(F_1 \wedge F_2)$