Linguaggi

14: Sistemi Deduttivi

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

21/11/2019

Sulla conseguenza logica (1/2)

$$\Gamma \Vdash F \quad \iff \quad \forall v, (\forall G \in \Gamma, [\![G]\!]^v = 1) \Rightarrow [\![F]\!]^v = 1$$

- Abbiamo definito in maniera computazionale la sintassi della logica proposizionale (via BNF) e la funzione di interpretazione semantica (per ricorsione strutturale)
- Abbiamo definito in maniera NON COMPUTAZIONALE la nozione di deduzione semantica
  - Non abbiamo usato ricorsione strutturale
  - La definizione quantifica su tutti gli infiniti mondi

Sulla conseguenza logica (2/2)

$$\Gamma \Vdash F \quad \Longleftrightarrow \quad \forall v, (\forall G \in \Gamma, [\![G]\!]^v = 1) \Rightarrow [\![F]\!]^v = 1$$

- Non vi è alcun algoritmo per determinare se $\Gamma \Vdash F$ quando Γ è infinito
- Quando Γ è finito possiamo costrutire tabelle di verità, ma
  1. Poco interessante: solo per la logica proposizionale classica
  2. Richiede un tempo esponenziale nella dimensione delle formule
  3. Nessuno dimostra/convince in questo modo

Vogliamo introdurre una nuova nozione sintattica

$$\Gamma \vdash F$$

(leggi: dalle ipotesi Γ deduco la conclusione F) tale che:

1. $\Gamma \vdash F$ quando ho una prova esplicita (in una qualche sintassi) del fatto che F "segua logicamente" da Γ
2. Correttezza: se $\Gamma \vdash F$ allora $\Gamma \Vdash F$
   "posso dimostrare solo le conseguenze logiche"
3. ci sia un algoritmo in grado di verificare efficientemente la correttezza della prova (p.e. Matita)

$$\Gamma \vdash F$$

Idealmente:

1. Vogliamo introdurre la sintassi delle prove tramite BNF per
   1. poter definire funzioni ricorsive strutturali su prove
   2. poter ragionare per induzione strutturale su prove
2. Vorremmo che valga la completezza:

$$\forall \Gamma, F. \quad \Gamma \Vdash F \rightarrow \Gamma \vdash F$$

"tutte le conseguenze logiche sono dimostrabili"

Sistemi Deduttivi

$$\Gamma \vdash F$$

In pratica:

1. useremo una notazione bi/tri-dimensionale per le prove
   - la penseremo come una BNF ...
   - ...ma la introdurremo informalmente per essere più flessibili
2. la completezza NON vale per logiche espressive (p.e. logiche classiche del secondo ordine, del terzo ordine, etc.)
3. tuttavia varrà (anche se in maniera non algoritmica) per la logica proposizionale e per la logica del prim'ordine che vedremo in questo corso

Lo Zoo dei Sistemi Deduttivi

$$\Gamma \vdash F$$

Ci sono tanti sistemi deduttivi differenti

- = sintassi diverse per le dimostrazioni
  Esempio: 4 sistemi deduttivi nel libro Asperti-Ciabattoni
- rispondono a esigenze diverse, p.e.
  - semplificare la costruzione e la comunicazione di prove da parte di un umano
  - velocizzare la ricerca automatica di dimostrazioni
  - minimizzare la taglia della sintassi per accorciare le meta-dimostrazioni
  - ...

Ne studiamo solo uno: la deduzione naturale orientata alla presentazione delle prove ad un umano

Piano di lavoro (1/2)

Da ora in avanti il nostro oggetto di studio saranno le prove:

- introdurremo una sintassi formale per le prove in deduzione naturale
- studieremo le loro proprietà usando meta-dimostrazioni in una meta-logica
- le prove in deduzione naturale saranno estremamente verbose non omettendo nessun dettaglio

Attenzione a non confondere

- formule con meta-formule
  es. `FAnd` vs $\wedge$ in Matita
- prove con meta-prove

Piano di lavoro (2/2)

Dopo aver definito la sintassi

1. studieremo la pragmatica (= come si fanno le prove) della deduzione naturale
2. dimostreremo i teoremi di correttezza e completezza

Dallo studio all'applicazione

1. continuerete nel resto dei vostri studi a scrivere le prove informalmente, omettendo i dettagli non interessanti
2. tuttavia una prova è corretta solo se siete in grado di esplicitarla in una prova in deduzione naturale
3. numerose applicazioni informatiche: per esempio un compilatore per capire se un programma è ben tipato costruisce prove in deduzione naturale