Logica

7: Conseguenza ed equivalenza logica in logica classica proposizionale

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

15/11/2019

Outline

Conseguenza logica per la logica proposizionale

Wikipedia: "*Logical consequence is the relation that holds between a set of sentences (or propositions) and a sentence (proposition) when the former "entails" the latter.*

Lezione precedente:
F è *conseguenza logica* di Γ ($\Gamma \Vdash F$) quando, al variare dell'interpretazione delle formule nei vari mondi possibili, è sempre vero che: se tutte le formule in Γ sono vere (nel mondo sotto esame), anche F è necessariamente vera.

Definizione: $\Gamma \Vdash F$ (conseguenza logica) quando per ogni mondo v si ha che, se $[\![G]\!]^v = 1$ per ogni $G \in \Gamma$, allora $[\![F]\!]^v = 1$

Definizione: $F \equiv G$ (equivalenza logica) quando $F \Vdash G$ e $G \Vdash F$
Caratterizzazione alternativa: $F \equiv G$ quando per ogni mondo v, $[\![F]\!]^v = [\![G]\!]^v$.

Tautologie

Definizione: F è tautologica (o è una tautologia) quando $\Vdash F$ (F è conseguenza logica dell'insieme vuoto di formule)

Teorema (o definizione alternativa):
$\Vdash F$ sse in ogni mondo v si ha $[\![F]\!]^v = 1$.

F è una tautologia quando rappresenta una verità assoluta (indipendente dal mondo in esame)

F è una tautologia se la sua tabella di verità presenta solo degli 1. Esempio: $A \Rightarrow A$

$v(A)$	$[\![A \Rightarrow A]\!]^v$
0	1
1	1

Soddisfacibilità e insoddisfacibilità

Nota: affinchè $\not\Vdash F$ (F non è una tautologia) è sufficiente un solo mondo v tale per cui $v(F) = 0$.

Definizione:
F è soddisfatta in un mondo v ($v \Vdash F$) sse $v(F) = 1$

Definizione:
F è soddisfacibile quando esiste un mondo v tale che $v \Vdash F$.

Teorema:
F è tautologica quando per ogni mondo v si ha $v \Vdash F$.

Definizione:
F è insoddisfacibile quando in nessun mondo v si ha $v \Vdash F$.

Soddisfacibilità e insoddisfacibilità

Nota: F è insoddisfacibile quando rappresenta una falsità assoluta (indipendente dal mondo in esame)

A livello di tabelle di verità per F:

1. F è tautologica se la tabella ha soli uno (es. $A \Rightarrow A$
2. F è insoddisfacibile se la tabella ha soli zero (es. $A \wedge \neg A$)
3. F è soddisfacibile se la tabella ha almeno un uno (es. $\neg A$)
4. F è non tautologica se la tabella ha almeno uno zero (es. $\neg A$)

Una formula F può essere classificata come segue:

1. una tautologia (e in tal caso è anche soddisfacibile)
   (soli uno nella tabella)
2. soddisfacibile ma non tautologica
   (sia uno che zero)
3. insoddisfacibile
   (soli zero nella tabella)

Equivalenza logica e tabelle di verità

F e G sono logicamente equivalenti $F \equiv G$ quando le loro tabelle di verità sono identiche

Esempio: $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$v(A)$	$v(B)$	$[\![A \Rightarrow B]\!]^v$	$[\![\neg A \vee B]\!]^v$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Conseguenza logica e tabelle di verità

Anche $\Gamma \Vdash F$ è rappresentabile con tabelle di verità, ma solo se Γ è un insieme finito (e quindi anche $Var(\Gamma)$ lo è):

1. Sia $n = |Var(F) \cup \bigcup_{G\in\Gamma} Var(G)|$.
   Si costruisce una tabella di verità con 2^n righe (mondi possibili).
2. $\Gamma \Vdash F$ quando F vale 1 in tutte le righe nelle quali tutte le formule in Γ valgono 1
3. In altre parole:
   1. si considerano solamente le righe in cui tutte le formule di Γ valgono 1
   2. $\Gamma \Vdash F$ se F è una tautologia ristretta a tali righe

Nota: quando Γ è vuoto ci si riduce a considerare tutte le righe

Conseguenza logica e tabelle di verità

Esempio: $A, A \Rightarrow B \Vdash A \vee B$

$v(A)$	$v(B)$	$[\![A]\!]^v$	$[\![A \Rightarrow B]\!]^v$	$[\![A \vee B]\!]^v$
0	0	0		
0	1	0		
1	0	1	0	
1	1	1	1	1

Teorema di invarianza per sostituzione

$F \equiv G$ quando in ogni mondo F e G hanno sempre la stessa denotazione

ovvero $F \equiv G$ quando sono due connotazioni diverse per la stessa denotazione

Siamo quasi pronti per enunciare formalmente il teorema di invarianza per sostituzione. Dalle lezioni precedenti:

Siano x e y due connotazioni per la stessa denotazione. Il principio di invarianza per sostituzione vale se per ogni contesto $P[\cdot]$ le due connotazioni $P[x]$ e $P[y]$ denotano la stessa cosa.

Ci resta da definire la nozione di sostituzione di una formula in un contesto.

Sostituzione

Un contesto è una formula che contiene uno o più buchi.

In logica proposizionale possiamo pensare a un buco come a una variabile proposizionale (diciamo la A).

Riempire un buco significa rimpiazzare la variabile con una formula.

Definizione (per ricorsione strutturale su F) di sostituzione una formula G al posto di A in F (scritto $F[G/A]$):

$$
\begin{array}{llll}
\bot[G/A] = \bot & \quad & (\neg F)[G/A] & = \neg F[G/A] \\
\top[G/A] = \top & & (F_1 \wedge F_2)[G/A] & = F_1[G/A] \wedge F_2[G/A] \\
A[G/A] = G & & (F_1 \vee F_2)[G/A] & = F_1[G/A] \vee F_2[G/A] \\
B[G/A] = B & & (F_1 \Rightarrow F_2)[G/A] & = F_1[G/A] \Rightarrow F_2[G/A]
\end{array}
$$

Teorema di invarianza per sostituzione

Teorema di invarianza per sostituzione: per tutte le formule F, G_1, G_2 e per ogni A, se $G_1 \equiv G_2$ allora $F[G_1/A] \equiv F[G_2/A]$

Dimostrazione: per induzione strutturale su F.
Caso $\bot$: $\bot[G_1/A] = \bot \equiv \bot = \bot[G_2/A]$
Caso $\top$: $\top[G_1/A] = \top \equiv \top = \top[G_2/A]$
Caso A: $A[G_1/A] = G_1 \equiv G_2 = A[G_2/A]$
Caso B: $B[G_1/A] = B \equiv B = B[G_2/A]$

Teorema di invarianza per sostituzione

Caso $F_1 \wedge F_2$:
Per ipotesi induttiva sappiamo

$$F_1[G_1/A] \equiv F_1[G_2/A] \quad \text{e} \quad F_2[G_1/A] \equiv F_2[G_2/A]$$

ovvero che per ogni mondo v si ha

$$[\![F_1[G_1/A]]\!]^v = [\![F_1[G_2/A]]\!]^v \quad \text{e} \quad [\![F_2[G_1/A]]\!]^v = [\![F_2[G_2/A]]\!]^v$$

Dobbiamo dimostrare

$$(F_1 \wedge F_2)[G_1/A] \equiv (F_1 \wedge F_2)[G_2/A]$$

o, equivalentemente, che per ogni v si ha

$$[\![(F_1 \wedge F_2)[G_1/A]]\!]^v = [\![(F_1 \wedge F_2)[G_2/A]]\!]^v$$

Teorema di invarianza per sostituzione

Sia v un mondo generico ma fissato.
Le ipotesi induttive specializzate a v dicono

$$[\![F_1[G_1/A]]\!]^v = [\![F_1[G_2/A]]\!]^v \quad \text{e} \quad [\![F_2[G_1/A]]\!]^v = [\![F_2[G_2/A]]\!]^v$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&[\![(F_1 \wedge F_2)[G_1/A]]\!]^v \\
=\ &[\![F_1[G_1/A] \wedge F_2[G_1/A]]\!]^v \\
=\ &\min\{[\![F_1[G_1/A]]\!]^v, [\![F_2[G_1/A]]\!]^v\} \\
=\ &\min\{[\![F_1[G_2/A]]\!]^v, [\![F_2[G_2/A]]\!]^v\} \\
=\ &[\![F_1[G_2/A] \wedge F_2[G_2/A]]\!]^v \\
=\ &[\![(F_1 \wedge F_2)[G_2/A]]\!]^v
\end{aligned}$$

Qed (caso $\wedge$)

I casi $\vee$ e $\Rightarrow$ sono analoghi.

Conclusioni

Per la logica proposizionale abbiamo:

1. dato formalmente una sintassi
2. data formalmente la semantica classica
3. definite formalmente le nozioni di conseguenza logica, equivalenza logica, soddisfacibilità, tautologicità
4. dimostrato il principio di invarianza per sostituzione

Nelle prossime lezioni studieremo in dettaglio la semantica dei nostri connettivi e le proprietà della conseguenza logica.