

# Logica

## 2: Verità e conseguenza logica

**Claudio Sacerdoti Coen**

`<sacerdot@cs.unibo.it>`

Università di Bologna

08/10/2020

# Outline

## 1 Verità e conseguenza logica

# Verità

Wikipedia: “Col termine **verità** si indicano una varietà di significati, che esprimono un senso di accordo con la **realtà**, e sono in genere collegati col concetto di onestà, buona fede e sincerità.

Verità fisiche, chimiche, . . . associate al **mondo sensibile**.

Un esperimento **ripetibile** definisce una verità.

Verità **parametrica** rispetto a **cambiamenti del mondo sensibile**.

Verità assolute associate ad aspetti immodificabili.

*Cosa resta della verità quando manca il mondo sensibile?  
(matematica, informatica)*

# Verità vs ragionamento ipotetico

Supponete di stare leggendo un libro di fantascienza

- leggendo il libro scoprite le leggi fisiche che **si suppone** valgano
- in base a quelle siete in grado di affermare che **in tale mondo** certi eventi accadano (siano vere) e altre no
- le leggi fisiche descritte individuano **una molteplicità di mondi fantastici**: non descrivono interamente l'intero funzionamento del mondo
- pertanto ci saranno eventi dei quali non saprete dire se accadano o no
- una descrizione completa del mondo dovrebbe dirci per ogni evento se esso accade o meno

# Verità in matematica

Una **teoria matematica** è come un libro di fantascienza

- gli **assiomi** sono come le leggi fisiche: ci dicono tutto quello che **supponiamo** valere **nei mondi** sotto considerazione
- un **modello matematico** della teoria è **un qualunque mondo** in cui interpretare i concetti matematici primitivi in modo tale che ogni assioma della teoria valga
- un **mondo** è una descrizione completa che determina un concetto di verità; gli assiomi tuttavia individuano **una molteplicità di mondi** (tutti i modelli della teoria)
- data una **proposizione**, essa potrebbe essere sicuramente vera in ogni modello di una teoria, sicuramente falsa o non determinata (a volte vera, a volte falsa)

# Teorie, modelli, verità: esempi

Esempio di teoria:

- Enti primitivi:  $0, \leq$
- Assiomi:  $\leq$  ha le proprietà riflessiva, antisimmetrica, transitiva e  $\forall n, 0 \leq n$

Esempio di proposizioni:

- 1  $\forall x. x \leq 0 \Rightarrow x = 0$
- 2  $\forall x, y. x \leq y \vee y \leq x$

Modello 1:

- interpreto gli oggetti come numeri naturali
- 0 come numero 0
- $\leq$  come  $\leq$  sui naturali
- tutti gli assiomi sono soddisfatti
- entrambe le proposizioni sono vere

Modello 2:

- interpreto gli oggetti come numeri naturali
- 0 come numero 1
- $\leq$  come "divide"
- tutti gli assiomi sono soddisfatti
- solo la prima proposizione è vera

È possibile trovare un modello della teoria in cui la prima proposizione sia falsa?

# Dalla verità alla conseguenza logica

Data una teoria e una proposizione

- **Non ha senso chiedersi se la proposizione sia vera o falsa** non sappiamo in quale mondo valutarla; non abbiamo un mondo (sensibile o meno) di riferimento
- **Ha senso chiedersi se sia vera in ogni modello della teoria**
  - gli assiomi della teoria sono **filtri** sulla totalità dei mondi;
  - restringendo l'insieme dei mondi sotto esame certe proposizioni assumono lo stesso valore di verità in tutti i mondi
- In tal caso diciamo che la proposizione è **conseguenza logica** degli assiomi

# Conseguenza logica

Sia  $\Gamma$  un insieme di sentenze e sia  $F$  una proposizione.

$F$  è *conseguenza logica* di  $\Gamma$  ( $\Gamma \Vdash F$ ) quando  $F$  è vera in tutti i modelli di  $\Gamma$ , ovvero in tutti i mondi in cui ognuna delle  $G \in \Gamma$  è vera



# Conseguenza logica

Intuizioni per  $\Gamma \Vdash F$ :

- Le sentenze in  $\Gamma$  costituiscono dei **vincoli** che i mondi debbono rispettare
- $\Gamma \Vdash F$  quando i vincoli sono **sufficienti** a garantire che  $F$  sia una verità in tutti i mondi che soddisfano i vincoli
- **Più** sono i **vincoli**, potenzialmente **meno** sono i **mondi** che li soddisfano, potenzialmente **più** sono le **conseguenze logiche** dei vincoli

Altra intuizione:

- Se  $\Gamma \Vdash F$  allora la “verità” di  $F$  (l’insieme dei mondi in cui  $F$  è vera) è già inclusa (è un sovrainsieme di) nella “verità” di  $\Gamma$  (l’insieme dei mondi in cui le formule di  $\Gamma$  sono vere)

# Equivalenza logica

Siano  $F$  e  $G$  due sentenze.

$F$  è logicamente equivalente a  $G$  ( $F \equiv G$ ) sse  $F \Vdash G$  e  $G \Vdash F$

Equivalentemente:  $F \equiv G$  sse  $F$  e  $G$  sono soddisfatte dagli stessi mondi.

Teorema: l'equivalenza logica è una relazione di equivalenza

Dimostrazione:

$F \equiv F$  in quanto in ogni mondo, se  $F$  è vera allora  $F$  è vera

se  $F \equiv G$  allora  $G \equiv F$ : perchè?

se  $F \equiv G$  e  $G \equiv H$  allora  $F \equiv H$ : perchè?

## Quando una teoria è interessante? (1/2)

Se le teorie descrivono insiemi di mondi, esse non sono mai “vere” o “false”, “giuste” o “sbagliate” (rispetto a cosa?)

Una teoria è **inconsistente** quando non ammette modelli, ovvero in nessun mondo tutti gli assiomi sono contemporaneamente veri.

Esempio:  $0 = 1, 0 \neq 1, \forall x.x = x$  è una teoria inconsistente

Fatto ovvio: se  $\Gamma$  è inconsistente allora per ogni  $F$  si ha  $\Gamma \Vdash F$

Dimostrazione:  $F$  deve valere nell'insieme vuoto di modelli, il che è vero

Corollario: **se  $\Gamma$  è inconsistente allora  $\Gamma \Vdash \perp$**  dove  $\perp$  è una proposizione falsa (anche chiamata assurdo)

## Quando una teoria è interessante? (2/2)

Un teorema complesso (che non dimostreremo) dice che è vero anche il contrario:

**Teorema:** se  $\Gamma \Vdash \perp$  allora  $\Gamma$  è inconsistente, ovvero non ha modelli.

Tutte le teorie consistenti (= non inconsistenti, in cui l'assurdo non è conseguenza logica) sono interessanti: esse hanno almeno un modello in cui tutte le conseguenze logiche di  $\Gamma$  sono vere.

**Fare matematica = studiare le conseguenze logiche di un insieme di assiomi (= studiarne la teoria)**

Una teoria è tanto più interessante di altre quanto più le sue conseguenze logiche sono utili una volta applicate ad altri campi (p.e. fisica, meteorologia, informatica, ...), ma le applicazioni potrebbero essere scoperte solo diversi secoli dopo (p.e. la teoria dei numeri è alla base della crittografia)

# Conclusioni

- La verità di una sentenza è sempre definita rispetto a:
  - 1 un mondo
  - 2 l'interpretazione degli enti primitivi nel mondo
- Normalmente, il valore di verità di una sola sentenza non è interessante: varia al variare del mondo
- Conseguenza logica:  $\Gamma \Vdash F$  quando in ogni mondo che rende vere tutte le sentenze di  $\Gamma$  anche  $F$  è necessariamente vera
- Equivalenza logica: chiusura simmetrica della conseguenza logica