Logica

1.5: Teoria Assomatica degli Insiemi (cenni)

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

24/09/2020

Teoria degli insiemi: perchè?

Teoria degli insiemi:

- "tutto è un insieme" $\Rightarrow$ gli insiemi contengono insiemi
- è il linguaggio macchina della matematica moderna: numeri, figure geometriche, funzioni, ... vengono descritti (implementati) come insiemi particolari
  Es. 2 è un insieme i cui soli elementi sono 0 e 1
- è estremamente efficace nel farlo
- permette di introdurre rigorosamente e comprendere concetti come gli infiniti
- purtroppo: si perdono gli aspetti computazionali
  Esempi:
  - le funzioni definite come insiemi non si calcolano;
  - le rappresentazioni dei dati sono inefficienti
    (il numero 10 come insieme richiede più di 100 insiemi per definirlo)

Teoria degli insiemi naive

ATTENZIONE: è inconsistente (paradosso di Russell)

- posso formare insiemi in qualunque modo mi venga in mente
- Esempio: elencando gli elementi $A = \{1, 2, \{a, 3, b\}\}$
- Esempio: tramite comprensione $A = \{X \mid P(X)\}$
  l'insieme di tutti i ragazzi biondi, di tutti i numeri pari, ...
- Gli insiemi NON devono essere omogeni
  possono contenere un mix di qualunque cosa perchè tutto è un insieme
- Operazione di base: l'appartenenza $\in$

Intuizione (non sempre corretta): insiemi come scatole, appartenenza come essere nella scatola.

- $1 \in \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2\} \notin \{1, 2, 3\}$
- $1 \notin \{\{1, 2\}, 3\}$
- $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, 3\}$
- $\emptyset \notin \{1, 2, 3\}$
- $\emptyset \in \{\emptyset, 1\}$

Teoria degli insiemi naive

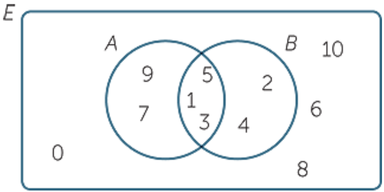
Intuizione (non sempre corretta): insiemi come scatole, A è un sottoinsieme di B ($A \subseteq B$) sse tutti gli elementi di A sono anche in B.

- $\{1,3\} \subseteq \{1,2,3\}$
- $\{1,3\} \not\subseteq \{\{1,3\},2\}$
- $1 \not\subseteq \{1,2,3\}$
- $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$
- $\{1\} \not\subseteq 1$
- $1 \subseteq 1$

Le ripetizioni e l'ordine non contano

$\{1,2,3\}$ è lo stesso insieme di $\{2,3,1,1,2\}$

Diagrammi di Venn



- cerchi (o quadrati) sono gli insiemi, etichettati con il loro nome;
  Esempio: A, B ed E sono insiemi
- i punti all'interno sono gli elementi
  Esempio: $5 \in A$, $5 \in B$, $5 \in E$
- cerchi/quadrati all'interno di altri cerchi/quadrati NON significa che ne siano membri
  Esempio: $A \notin E$

Diagrammi di Venn

Altamente fuorvianti! Usare con estrema attenzione!!!

- Come rappresento $\{\{1,2\},3\}$ per non confonderlo con $\{1,2,3\}$?
- Come rappresento un insieme che contiene se stesso?
- Gli insiemi non hanno un'area
- ...

Teorie assiomatiche degli insiemi: perchè?

Paradosso di Russell

Sia $X = \{Y \mid Y \notin Y\}$

$X \in X$ sse $X \notin X$

- Il paradosso mostra che la teoria naif degli insiemi porta a inconsistenza logica
- La teoria naif usa l'assioma di comprensione: per ogni proprietà P si può formare $\{x \mid P(x)\}$
- Serve una teoria che rimuova l'assioma di comprensione
- Serva una teoria che controlli l'uso meta-linguistico
  - X non deve essere un insieme ma una classe perchè "troppo grande"
  - certe collezioni di insiemi devono essere insiemi

Teorie assiomatiche degli insiemi: preliminari

In una teoria assiomatica degli insiemi:

1. I concetti di insieme, appartenenza e uguaglianza non vengono definiti (gli insiemi sono enti primitivi: definire un insieme come una collezione, definita come un gruppo, etc. non serve a nulla)
2. Usiamo assiomi per asserire l'esistenza di alcuni insiemi a partire da altri
3. Ci sono numerose teorie insiemistiche che differiscono riguardo agli assiomi
4. Noi seguiremo la teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF) che è la meno controversa ed è già sufficiente per sviluppare la maggior parte della matematica
5. ZF non è mai stata dimostrata essere consistente

Assioma di estensionalità

Due insiemi sono uguali sse hanno gli stessi elementi.

$$\forall X, \forall Y, (X = Y \iff \forall Z.(Z \in X \iff Z \in Y))$$

Definizione di essere sottoinsieme

X è sottoinsieme di Y se Y possiede tutti gli elementi di X

$$X \subseteq Y \stackrel{\text{def}}{=\!=} \forall Z, (Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$$

Assioma di separazione

Dato un insieme, possiamo formare il sottoinsieme dei suoi elementi che soddisfano una proprietà

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, (Z \in Y \iff Z \in X \land P(Z))$$

Indichiamo tale Y come $\{Z \in X \mid P(Z)\}$

Per usare l'assioma di separazione per riprodurre il paradosso di Russell servirebbe un insieme U che contenesse tutti gli altri insiemi:

$$X = \{Y \in U \mid Y \notin Y\}$$

Nessun assioma asserirà che U esista: la collezione di tutti gli insiemi è una classe propria (cioè una classe che NON è un insieme).

Assioma dell'insieme vuoto

$$\exists X, \forall Z, Z \notin X$$

L'insieme X viene indicato come $\emptyset$

Definizione dell'insieme vuoto

L'assioma è ridondante. Sia Y un qualunque altro insieme di cui un assoma asserisce l'esistenza (vedi p.e. assioma dell'infinito).

$$\emptyset \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{X \in Y \mid \mathit{false}\}$$

Definizione di intersezione binaria

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{X \in A \mid X \in B\}$$

Teorema

$$X \in A \cap B \iff X \in A \land X \in B$$

Dimostrazione: ovvio per l'assioma di separazione.

Intersezione *n*-aria

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = (\ldots((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \ldots \cap A_n)$$

Tuttavia l'assioma di intersezione binaria NON permette di intersecare un'infinità di insiemi.

Definizione di intersezione

Dato un insieme di insiemi, esiste l'insieme che ne è l'intersezione.

$$\bigcap F \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \text{ se } F = \emptyset$$

$$\bigcap F \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in A \mid \forall Y, (Y \in F \Rightarrow X \in Y)\} \text{ dove } A \in F$$

La definizione non dipende dall'A scelto. $\bigcap F$ si indica anche come $\bigcap_{Y \in F} Y$.

Intuizione

F è l'insieme (eventualmente infinito) di tutti gli insiemi da intersecare, $\bigcap_{Y \in F} Y$ è l'insieme intersezione di tutti quelli.

Es. (per ora informale) $\bigcap_{Y \in \{A,B,C\}} Y = A \cap B \cap C$.

Assioma dell'unione

Dato un insieme di insiemi, esiste l'insieme che ne è l'unione.

$$\forall F, \exists X, \forall Z, (Z \in X \iff \exists Y, (Y \in F \land Z \in Y))$$

L'insieme X viene indicato con $\bigcup F$ o $\bigcup_{Y \in F} Y$.

Teorema dell'unione binaria

$$\forall A, \forall B, \exists X, \forall Z, (Z \in X \iff Z \in A \lor Z \in B)$$

Si dimostra una volta che si è dimostrata per ogni A e B l'esistenza di un insieme che contiene solo A e B.

Assioma del singoletto

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, (Z \in Y \iff Z = X)$$

L'insieme Y viene indicato come $\{X\}$

Teorema del singoletto

Anche l'assioma precedente è ridondante: può essere dimostrato a partire dall'assioma di rimpiazzamento (introdotto dopo).

(Abuso di) notazione

Con la notazione $\{A_1, \ldots, A_n\}$ indicheremo l'insieme $\{A_1\} \cup \ldots \cup \{A_n\}$ che esiste in virtù degli assiomi del singoletto e dell'unione.

$X \in \{A_1, \ldots, A_n\}$ sse $X = A_1$ oppure ... oppure $X = A_n$.

Costruzione dei numeri naturali

Per ogni meta-numero naturale n, definiamo un insieme $[\![n]\!]$ che identificheremo/indicheremo con il numero naturale n.

$$
\begin{aligned}
[\![0]\!] &\stackrel{\text{def}}{=\!=} \emptyset \\
[\![n+1]\!] &\stackrel{\text{def}}{=\!=} [\![n]\!] \cup \{[\![n]\!]\}
\end{aligned}
$$

Esempi:

$$
\begin{array}{ll}
[\![0]\!] = \emptyset & \text{indicato con } 0 \\
[\![1]\!] = \{\emptyset\} & \text{indicato con } 1 \\
[\![2]\!] = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} & \text{indicato con } 2 \\
[\![3]\!] = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} & \text{indicato con } 3
\end{array}
$$

Tutti i numeri sono diversi

Esempio: supponiamo per assurdo $1 = 2$.
Quindi $\forall Z, (Z \in 1 \iff Z \in 2)$ per l'assioma di estensionalità.
Poichè $1 \in 2$ per l'assioma dell'unione e quello del singoletto, ne deduciamo $1 \in 1 = \{\emptyset\}$.
Quindi $\{\emptyset\} = 1$ e $1 = \emptyset$ per l'assioma del singoletto.
Quindi $\forall Z, (Z \in \{\emptyset\} \iff Z \in \emptyset)$.
Quindi poichè $\emptyset \in \{\emptyset\}$ per l'assioma del singoletto, ne deduciamo $\emptyset \in \emptyset$.
Il che è assurdo per l'assioma/teorema del vuoto.
Dall'assurdo concludiamo $1 \neq 2$.

Osservazione informale

Fino ad ora tutti gli insiemi di cui abbiamo asserito l'esistenza sono insiemi finiti. Il prossimo assioma (assioma dell'infinito) asserirà l'esistenza di un insieme infinito.

La definizione di infinito ed infinito è complessa e la vedremo in seguito.

Assioma dell'infinito

Esiste un insieme che contiene almeno tutti (gli encoding de)i numeri naturali.

$$\exists Y, (\emptyset \in Y \wedge \forall N, (N \in Y \Rightarrow N \cup \{N\} \in Y))$$

Indichiamo temporaneamente con $\mathcal{N}$ tale insieme.

Teorema: esistenza di $\mathbb{N}$

Combinando altri assioma con quello dell'infinito si arriva a dimostrare l'esistenza dell'insieme $\mathbb{N}$ che contiene tutti e soli (gli encoding de)i numeri naturali.

Assioma dell'insieme potenza

Esiste l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme dato.

$$\forall X, \exists Y, \forall Z, (Z \in Y \iff Z \subseteq X)$$

Indichiamo Y come 2^X o $\mathcal{P}(X)$ (insieme potenza o insieme delle parti).

Esempio

$2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Assioma di regolarità (o di fondazione)

Ogni insieme non vuoto ha un elemento dal quale è disgiunto.
Fra le conseguenze: nessun insieme contiene (ricorsivamente) se stesso e ha quindi senso cercare di misurare la taglia (chiamata cardinalità) di un insieme.

Assioma di rimpiazzamento

Intuitivamente: l'immagine di un insieme rispetto a una formula che descrive una funzione è ancora un insieme.
Intuitivamente: se A è un insieme, quindi è abbastanza piccolo, e a ogni elemento ne associo un altro, in una relazione molti-a-uno, quello che ottengo come immagine è ancora piccolo.