# Esercizi di Logica Matematica

Ugo Dal Lago
{dallago}@cs.unibo.it

June 6, 2006

## 1 Logica Proposizionale

**Esercizio 1.**
Stabilire se le seguenti fbf sono valide, soddisfacibili o insoddisfacibili:

$$\neg(A \wedge \neg A)$$
$$A \rightarrow (A \rightarrow B)$$
$$\bot \rightarrow \neg \bot$$
$$(A \wedge B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$$
$$(A \vee B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$$
$$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (A \vee C \rightarrow B \vee D)$$

**Esercizio 2.**
Stabilire se i seguenti insiemi di fbf sono soddisfacibili:

$$\{A \wedge B, \neg B\}$$
$$\{A \rightarrow B, \neg A, C\}$$
$$\{A \vee B, \neg B \vee C, \neg C \vee A\}$$

**Esercizio 3.**
Consideriamo le fbf ottenute a partire dai simboli atomici, ma utilizzando soltanto i connettivi $\wedge$ e $\vee$. Dimostrare che tutte queste fbf sono soddisfacibili e che nessuna tra esse è valida.
**Esercizio 4.**
Consideriamo le fbf ottenute a partire dai simboli atomici, ma utilizzando soltanto il connettivo $\leftrightarrow$. Dimostrare che tutte queste fbf sono soddisfacibili. Dare un esempio di una formula valida.
**Esercizio 5.**
Stabilire se le seguenti affermazioni risultano vere:
- Se $\models P$, allora $\models P \vee Q$;
- Se $\models P$, allora $\models P \wedge Q$;
- $P \models Q \wedge R$ se e soltanto se $P \models Q$ e $P \models R$;
- Se $\neg P \models \neg Q$, allora $P \models Q$;
- $P \models Q$ se e soltanto se $\neg Q \models \neg P$;
- $P, Q \models R$ se e soltanto se $\models Q \rightarrow (P \rightarrow R)$;

**Esercizio 6.**
Dimostrare che se $P \models Q$ e $Q \models P$, allora $P \equiv Q$. Usare poi questo fatto per dimostrare che se $P \vee Q \models P \wedge Q$, allora $P \equiv Q$.
**Esercizio 7.**

Dimostrare le seguenti equivalenze semantiche:

$$\neg \perp \vee A \equiv \neg \perp$$
$$\perp \wedge A \equiv \perp$$
$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$
$$A \vee B \equiv \neg A \to B$$
$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
$$\neg A \equiv \to \perp$$
$$A \wedge B \equiv (((A \to \perp) \to \perp) \to (B \to \perp)) \to \perp$$
$$A \to (B \to C) \equiv \neg(A \wedge B \wedge \neg C)$$

**Esercizio 8.**
Dimostrare la seguente variante del teorema di deduzione semantica: $P_1, \ldots, P_n \models Q$ se e soltanto se $\models \neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \ldots \vee \neg P_n \vee Q$.
**Esercizio 9.**
Dimostrare che le seguenti fbf sono tautologiche tramite l'utilizzo di equivalenze semantiche:

$$(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$$
$$(A \to B) \to (A \wedge B \to C) \to (A \to C)$$

**Esercizio 10.**
Per ognuna delle seguenti fbf, si costruiscano una forma normale congiuntiva e una forma normale disgiuntiva equivalenti ad essa.

$$\neg(A \leftrightarrow B)$$
$$((A \to B) \to B) \to B$$
$$(A \to (A \wedge \neg B)) \wedge (B \to (B \wedge \neg A))$$

**Esercizio 11.**
Si dimostri la validità delle seguenti fbf nel calcolo della deduzione naturale e tramite il metodo di risoluzione.

$$A \wedge B \to B \wedge A$$
$$\neg(A \wedge \neg A)$$
$$\perp \to A$$
$$(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$
$$(A \to \neg A) \to \neg A$$
$$A \vee \neg A$$
$$(A \to \neg A) \to \neg A$$
$$A \vee B \leftrightarrow ((A \to B) \to B)$$
$$(A \leftrightarrow \neg \perp) \vee (A \leftrightarrow \perp)$$
$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$$
$$(A \to B) \vee (B \to A)$$
$$((A \to B) \wedge (A \to (B \to C))) \to (A \to C)$$
$$(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$$
$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$$

**Esercizio 12.**
Dimostrare che:
- Se $\Gamma, P \vdash Q$, allora $\Gamma, P \vdash Q \vee R$;
- Se $\Gamma, P \vdash Q$, allora $\Gamma, P \wedge R \vdash Q$;
- Se $\Gamma, P \vdash Q$ e $\Gamma, R \vdash Q$, allora $\Gamma, P \vee R \vdash Q$.

# 2 Logica Predicativa

**Esercizio 1.**

Sia $\Sigma = \langle\{f, g\}, \{A, B, C\}\rangle$ una segnatura, dove $f$ è unario, $g$ è una costante, $A, B$ sono unari e $C$ è binario. Sia $\mathcal{E} = \langle D, \{f^{\mathcal{E}}, g^{\mathcal{E}}\}, \{A^{\mathcal{E}}, B^{\mathcal{E}}, C^{\mathcal{E}}\}\rangle$ dove

$$\begin{aligned} D &= \{1,2,3\} \\ f^{\mathcal{E}}(1) &= 2 \\ f^{\mathcal{E}}(2) &= 2 \\ f^{\mathcal{E}}(3) &= 1 \\ A^{\mathcal{E}} &= \{1\} \\ B^{\mathcal{E}} &= \{1,2\} \\ C^{\mathcal{E}} &= \{(1,1),(2,3)\} \end{aligned}$$

Sia $\xi$ un ambiente definito da $\xi(x) = 1$ per ogni variabile $x$. Stabilire se

- $\mathcal{E}, \xi \models A(f(x)) \vee (B(f(y)) \rightarrow \exists x \neg C(f(f(g)), x))$
- $\mathcal{E}, \xi \models \forall x(A(f(x)) \vee C(f(x), g))$

**Esercizio 2.**
L'insieme $\Gamma = \{\exists x \neg A(x)\} \cup \{A(z) \mid z \in VAR\}$ è soddisfacibile? Nel caso di risposta affermativa, trova $\mathcal{A}$ e $\xi$ tali che $\mathcal{A}, \xi \models \Gamma$.

**Esercizio 3.**
Siano $P, Q$ enunciati e $R(x)$ una fbf con una sola variabile libera in un linguaggio $L$. Sia $\mathcal{A}$ un'interpretazione di $L$. Tra le seguenti affermazioni, alcune sono corrette, altre no. Danne una dimostrazione nel primo caso e trova un controesempio nel secondo.

- Se $P \vee Q$ è vera in $\mathcal{A}$, allora $P$ è vera in $\mathcal{A}$ oppure $Q$ è vera in $\mathcal{A}$.
- Se $P \vee Q$ è valida allora $P$ è valida oppure $Q$ è valida.
- Se $\exists x R(x)$ è vera in $\mathcal{A}$ allora esiste una costante $f$ tale che $R\{f/x\}$ è vera in $\mathcal{A}$.
- Se $\exists x R(x)$ è valida allora esiste un termine chiuso $t$ tale che $R\{t/x\}$ è valida.

**Esercizio 4.**
Per ognuno degli enunciati seguenti, indicare (quando possibile) un'interpretazione che lo rende vero ed una che lo rende falso

$$\forall x \exists y A(x, y) \wedge \neg \forall x B(x)$$
$$\forall x B(x) \vee \forall x \neg B(x)$$
$$\forall x(B(x) \vee \neg B(x))$$
$$(\exists x B(x) \rightarrow B(f)) \wedge \neg B(f)$$
$$(\exists x B(x) \rightarrow B(f)) \wedge B(g)$$
$$B(f) \rightarrow \neg B(g)$$
$$\forall x(B(x) \vee C(x)) \rightarrow \forall x B(x) \vee \forall x C(x)$$

**Esercizio 5.**
Dimostrare la validità delle formule seguenti usando la deduzione naturale e il metodo di risoluzione.

$$\forall x \exists y(A(y) \rightarrow A(x))$$
$$\neg \exists y \forall x((\neg B(x, x) \rightarrow B(x, y)) \wedge (B(x, y) \rightarrow \neg B(x, x)))$$
$$(\exists x A(x) \rightarrow \forall x C(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow C(x))$$
$$\exists x \forall y B(x, y) \rightarrow \forall x \exists y B(y, x)$$
$$\forall x(A(x) \rightarrow D(f(x))) \wedge \exists x A(x) \rightarrow \exists x D(x)$$
$$\exists x(A(x) \rightarrow A(f(x)))$$
$$\exists x(A(f(x)) \rightarrow A(x))$$
$$\forall x \forall y(B(x, y) \rightarrow \neg B(y, x)) \rightarrow \neg \exists x B(x, x)$$
$$\exists x(\neg A(x) \rightarrow A(f(x))) \wedge \forall x C(x) \rightarrow \exists x(A(x) \wedge C(x))$$
$$\exists x(\neg A(x) \wedge \forall y(C(x) \rightarrow A(y))) \wedge \forall x(\neg C(x) \rightarrow A(f(x))) \rightarrow \exists x A(x)$$

**Esercizio 6.**
Usando il metodo di risoluzione dimostra che

$$\exists x(A(x) \vee B(x)), \forall x(A(x) \rightarrow C(x)), \forall x(B(x) \rightarrow C(f(x))) \models \exists x C(x)$$

**Esercizio 7.**
Dimostrare, usando il metodo il risoluzione, che la formula $\forall x A(x, x)$ è conseguenza logica dell'insieme di enunciati

$$\Gamma = \{\forall x \forall y (A(x, y) \to A(y, x)), \forall x \exists y A(x, y), \forall x \forall y \forall z (A(x, y) \land A(y, z) \to A(x, z))\}$$

**Esercizio 8.**
Dimostra che il seguente enunciato è insoddisfacibile utilizzando il metodo di risoluzione

$$\forall x \exists y A(x, y) \land \exists x \forall y \neg A(x, y)$$

## 3 Esercizi in Preparazione all'Esame

**Esercizio 1.**
Descrivere tutti i modelli della fbf

$$\forall x \exists y (\neg(x = y) \land x \leq y)$$

assumendo che $=$ e $\leq$ abbiano sempre il loro significato standard (si assuma, in altre parole, che $=$ sia sempre interpretato come l'identità del dominio e $\leq$ come un ordine parziale sul dominio).
**Esercizio 2.**
Descrivere tutti i modelli della fbf

$$\exists x \forall y (x \leq y)$$

assumendo che $\leq$ sia sempre interpretato come un ordine lineare sul dominio.
**Esercizio 3.** Si dimostri la validità delle seguenti formule utilizzando equivalenze semantiche note, deduzione naturale oppure risoluzione

$$(A \to C) \lor (B \to C) \to (A \land B \to C)$$
$$(A \land B) \lor (\neg A \land B) \lor (A \land \neg B) \lor (\neg A \land \neg B)$$
$$\neg(A \land (\neg A \lor B \lor C) \land (\neg B \lor D) \land \neg C \land \neg D)$$

**Esercizio 4.**
Si dimostri nel calcolo della deduzione naturale e col metodo di risoluzione che la seguente formula è valida

$$(\exists x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x (A(x) \to B(x))$$

**Esercizio 5.**
Dimostrare, usando il metodo il risoluzione, che la formula $\exists x A(f(f(x)))$ è conseguenza logica dell'insieme di enunciati

$$\Gamma = \{\forall x (A(x) \to B(x)), \forall x (B(x) \to A(f(x))), \exists x B(x)\}$$

**Esercizio 6.**
Si dimostri nel calcolo della deduzione naturale e col metodo di risoluzione che la seguente formula è valida

$$\exists x A(x, x) \land \forall x \forall y (A(x, y) \to A(x, f(y))) \land \forall x \forall y (A(x, y) \to A(y, x)) \to \exists x A(f(f(x)), f(f(x)))$$