Logica per l'Informatica

Deduzione Naturale 4

21/11/2023

Per ogni esercizio, dare una dimostrazione in DN (classica o intuizionista) degli enunciati, *specificando in ogni caso se la dimostrazione fornita è classica o intuizionista.* Privilegiare una dimostrazione intuizionista, ove possibile.

Esercizio 1.

$$\neg B \to \neg A \vdash A \to B$$

$$\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$$

$$A \to B \vdash \neg A \vee B$$

$$\neg A \vee B \vdash A \to B$$

Esercizio 2. Per i seguenti enunciati ci diamo un predicato unario P nel nostro linguaggio.

$$\exists x. \neg P(x) \vdash \neg \forall x. P(x)$$

$$\neg \forall x. P(x) \vdash \exists x. \neg P(x)$$

[*Suggerimento per il secondo: Usa subito il terzo escluso per dire che un generico termine o verifica o non verifica il predicato P. Come si scrive?*]

Esercizio 3. Ricorda la teoria degli insiemi ZF che abbiamo visto nella prima parte del corso. Già in aula avete formalizzato un enunciato da Matita a DN. Facciamolo di nuovo.

Ci diamo un linguaggio con un predicato binario $\in$, e (per ogni termine t, t' del linguaggio) scriviamo $t \in t'$ come zucchero sitattico per la formula $\in(t, t')$ (ovvero, per comodità, ci mettiamo d'accordo di scrivere il primo intendendo il secondo). Scriviamo inoltre $t \notin t'$ come zucchero sintattico per la formula $\neg(t \in t')$. Per ora non ci diamo nessun assioma che regola questo predicato, ma nel prossimo esercizio ce ne daremo che ci permettono di dire che $t \in t'$ esprime il fatto che l'insieme t appartiene ad l'insieme t'.

Ma prima di questo, possiamo gia dimostrare i seguenti enunciati, per un qualsiasi termine a fissato del linguaggio: dimostrali (e non scordare di dire se la dimostrazione fornita è classica od intuizionista) e rispondi alle seguenti domande:

3.1)
$$\exists x.x \in a \vdash \neg\forall x.x \notin a$$

3.2)
$$\neg\forall x.x \notin a \vdash \exists x.x \in a$$

[*Suggerimento: Ispirati dalle dimostrazioni degli enunciati dell'esercizio 2.*]

Osservazione: se pensiamo che i termini del linguaggio rappresentano insiemi, e se supponiamo che possiamo leggere la formula $t \in t'$ come esprimente il fatto che l'insieme t appartiene all'insieme t', allora la formula $\forall x.x \notin a$ esprime il fatto che a non ha elementi. Ed il primo enunciato che hai dimostrato esprime il fatto che se a ha almeno un elemento, allora non vale che a non ha elementi; ed il secondo enunciato esprime il fatto che se non vale che a non ha elementi, allora a ha almeno un elemento. Si tratta di due modi (classicamente, ma non intuizionisticamente) equivalenti di esprime il fatto che a è non vuoto.

Esercizio 4. Andiamo avanti con le formalizzazioni di ZF nello stile dell'esercizio 3.

Oltre al predicato $\in$ dell'esercizio 3, ci diamo nel nostro linguaggio anche un predicato binario $=$, e (per ogni termine t, t' del linguaggio) scriviamo $t = t'$ come zucchero sintattico per $= (t, t')$. Ci diamo anche un termine di base del linguaggio, chiamato $\emptyset$. Consideriamo le seguenti formule, che intuitivamente esprimono il fatto che questi simboli rappresentano, rispettivamente, l'appartenenza tra insiemi, l'uguaglianza tra insiemi, e l'insieme vuoto.

$$\text{extensionality} := \forall a.\forall b.((\forall y.(y \in a \leftrightarrow y \in b)) \leftrightarrow a = b)$$
$$\text{ax\_empty} := \forall x.x \notin \emptyset$$

Si tratta sostanzialmente degli assiomi che avete gia usato in Matita.

Ricorda che $A \leftrightarrow B$ è zucchero sintattico per la formula $(A \to B) \wedge (B \to A)$.

4.1) In generale, diciamo che un insieme v è un insieme vuoto sse posso dimostrare $\forall x.x \notin v$. Ora, dire che l'insieme vuoto è unico significa dire che, se v è un insieme vuoto, allora v e $\emptyset$ sono uguali. Detto ciò, formalizza e dimostra in DN il seguente enunciato (ricorda di precisare sempre se la dimostrazione fornita è classica o intuizionista):

"*Siano extensionality ed ax_empty presi come assiomi. Si ha: l'insieme vuoto è unico*".

[*Suggerimento: Puoi aiutarti con la seguente dimostrazione in Matita, di quasi la stessa formula (sotto quasi gli stessi assiomi), che avete gia fatto qualche laboratorio fa.*]

```
*set-theory-lesson3.ma

* Esercizio 1 *)

heorem unicita_del_vuoto: ∀V.( (∀Z. Z ∈ V → False) → V = ∅ ).
* Perché questa formula esprime il fatto che l'insieme vuoto è unico ?? *)
 assume  V:set
 suppose ( ∀Z.(Z ∈ V → False) ) (V_no_elem)
 we need to prove (∀Z. (Z ∈ V → Z ∈ ∅)) (V_subset_empty)
   assume Z:set
   suppose (Z ∈ V) (Z_in_V)
   by V_no_elem, Z_in_V we proved False (contraddizione)
   using (ABSURDUM contraddizione) done
 we need to prove (∀Z. (Z ∈ ∅ → Z ∈ V)) (empty_subset_V)
   assume Z:set
   suppose (Z ∈ ∅) (Z_in_empty)
   by ax_empty, Z_in_empty we proved False (contraddizione)
   using (ABSURDUM contraddizione) done
 by conj,(empty_subset_V),(V_subset_empty) we proved (∀Z. (Z ∈ V ⇔ Z ∈ ∅)) (iff)
 by ax_extensionality, iff done
ed.
* Hai notato qualcosa sulle dimostrazioni dei due 'we need to prove' precedenti ?
      Sono le stesse, basta giusto scambiare V e ∅ !!
      Perché ? Guarda l'assioma del vuoto e l'enunciato del teorema... *)

* In maniera analoga si puo' dimostrare l'unicità degli altri insiemi che avete costruito (
  insieme potenza, singoletto, coppia ordinata, prodotto cartediano, insieme delle funzioni
  Per esempio, potete dimostrare la formula:
      ∀U,A,B.( (∀Z. Z ∈ U ⇔ (Z ∈ A ∨ Z ∈ B)) → U = A ∪ B ).
  che esprime (perché??) l'unicità dell'unione di insiemi fissati. *)
```

4.2) Aggiugiamo al nostro linguaggio un simbolo per funzione unaria succ[1]. Con-

[1] Questa funzione rappresenta il successore (ovvero la funzione $n \mapsto n+1$ sui numeri naturali) all'interno di ZF con una certa codifica dei numeri naturali, chiamata codifica di Von Neuman...

sideriamo la seguente formula:

$$\text{ax\_succ} := \forall x.\forall y.(y \in \text{succ}(x) \leftrightarrow (y = x \lor y \in x))$$

Per comodità ci diamo anche la formula seguente (che in realtà può essere dimostrata da extensionality):

$$\text{identity} := \forall x.x = x$$

Dimostra il seguente enunciato (ricorda di precisare sempre se la dimostrazione fornita è classica o intuizionista):

$$\text{identity}, \text{ax\_succ} \vdash \forall n.\exists m.\exists k.(n \in m \land m = \text{succ}(k)).$$

Esercizio 5. Se stai leggendo questa frase significa che sei in laboratorio, e dunque l'insieme delle persone nel laboratorio è non vuoto. Io asserisco che attualmente esiste un(a) tuo(a) compagno(a) x, in laboratorio, che è tale che se questa persona verrà bocciata all'esame di logica, allora tutti voi in laboratorio verrete bocciati! Certo, non sono in grado di dirti chi è tale persona...

Se non ci credi, formalizziamo l'enunciato in DN e dimostriamolo: ci diamo un predicato unario B ($B(x)$ starà per "x verrà bocciato all'esame di logica") ed allora devi dimostrare il seguente enunciato (e dire se è classico o intuizionista):

$$\exists x.(B(x) \to \forall y.B(y))$$

[*Suggerimento: Prima dimostra l'enunciato a parole (non in DN). Poi traduci questa dimostrazione in DN. Un'idea è di cominciare subito col dire che ci sono solo due casi: o tutti voi nel laboratorio verrete bocciati, oppure non tutti voi verrete bocciati. Nel primo caso è facile concludere, basta prendere una qualsiasi persona (ne abbiamo almeno una perché sappiamo che il laboratorio ne contiene almeno una); nel secondo caso, usando l'esercizio 2(2), possiamo dedurre che allora esiste una persona nel laboratorio che non verrà bocciata. Ma allora riusciamo a concludere anche in quel caso, prendendo proprio tale persona come testimone per l'esistenziale che dobbiamo dimostrare.*]

Osservazione: visto che abbiamo dimostrato questo enunciato per un generico predicato unario B, possiamo ora interpretarlo come vogliamo: per esempio abbiamo dimostrato che esiste qualcuno nel laboratorio che è tale che, se questa persona è attualmente ubriaca, allora nel laboratorio siete tutti ubriachi!