dimostrazione

introduzione

$$\forall$$

Per dimostrare $\forall.P(x)$ (per ogni x vale P (x)):

“sia x (un insieme) fissato; . . .”

(i “. . .” sono una prova di P (x))

$$\Longrightarrow$$

Per dimostrare $P \implies Q$:

“Assumo P (H). . . .”

(“H”) è il nome dell’ipotesi;

i “. . .” sono una prova di Q)

$$\Longleftrightarrow$$

Per dimostrare $P \iff Q$ si dimostra sia $P \implies Q$ che $Q \implies P$.

$$\wedge$$

Per dimostrare $P \wedge Q$ (P e Q) si dimostrano sia P che Q.

$$\vee$$

Per dimostrare $P \vee Q$ (P o Q) basta dimostrare P oppure Q dichiarandolo:

“dimostro P” oppure *“dimostro Q”*

$$\exists$$

Per dimostrare $\exists x.P(x)$ (esiste un x per cui vale P (x)):

“scelgo E e dimostro P (E) ; . . .”

(i “. . .” sono una prova di P (E))

E può essere un’espressione qualsiasi (es. $B \cap C$).

eliminazione

$$\forall$$

Da un'ipotesi o un risultato intermedio $\forall x.P(x)$ potete concludere che P valga per ciò che volete.

$$\implies$$

Da un'ipotesi o un risultato intermedio $P \implies Q$ e da un'ipotesi o un risultato intermedio P potete concludere che Q vale.

(variante)

Da un'ipotesi o un risultato intermedio $P \implies Q$ di nome H , se volete concludere Q, potete procedere dicendo

"per H , per dimostare Q mi posso ridurre a dimostrare P"

$$\iff$$

L'ipotesi $P \iff Q$ può essere usata sia come un'ipotesi $P \implies Q$, che come un'ipotesi $Q \implies P$.

Assurdo

Se ho dimostrato l'assurdo posso concludere qualunque cosa.

$$\wedge$$

Un'ipotesi o un risultato intermedio $P \wedge Q$ può essere usato sia come P che come Q. In alternativa, invece di concludere o assumere $P \wedge Q$ (H), si può direttamente concludere o assumere P (H1) e Q (H2).

$$\vee$$

Data un'ipotesi o un risultato intermedio $P \vee Q$, si può proseguire nella dimostrazione per casi, una volta assumendo che P valga e una volta che Q valga:

"procedo per casi:

caso in cui valga P (H): . . .

caso in cui valga Q (H): . . . "

$$\exists$$

Da un'ipotesi o un risultato intermedio $\exists x.P(x)$ potete procedere nella prova dicendo

"sia x t.c. P (x) (H)"

x deve essere una variabile non in uso in nessuna ipotesi o nella conclusione

altro e abbreviazioni

Per ogni tale che

"sia x tale che P (x). . . ."

abbrevia

"sia x (un insieme) fissato; assumo P (x); . . ."

per dimostrare $\forall x.P(x) \implies Q(x)$

Da H1, . . . , Hn

"da H1, . . . , Hn ho P (H)"

dove ogni Hi ha la forma $\forall\ x.Qi1(\ x) \implies \cdots \implies Qini(\ x)$ abbrevia l'applicazione di un numero arbitrario di regole di eliminazione del per ogni e dell'implicazione applicate a partire dalle ipotesi H1, . . . , Hn e tali per cui la conclusione finale sia P . Il nome H verrà poi usato quando P è una conclusione intermedia.

Quindi

"quindi" e sinonimi sono un modo per fare riferimento all'ultima ipotesi/risultato intermedio, magari omettendone del tutto il nome nel testo

Ovvio

il lettore è in grado da se di ricostruire la prova, non indica che la prova è intuitiva

Espansione di definizioni "P , ovvero Q" usato per espandere da qualche parte in P una definizione, ottenendo la frase Q Esempio: $A \subseteq B$ ovvero $\forall X.(X \in A \implies X \in B)$.

Esplicitazione della conclusione

Talvolta conviene esplicitare la conclusione corrente (cosa resta da dimostrare) attraverso *"dobbiamo dimostrare P"*.

Negazione

Non P è un'abbreviazione per $P \implies$ assurdo. Pertanto per dimostrare non P si assume che P valga e si dimostra l'assurdo. Inoltre, data un'ipotesi (o risultato intermedio) non P e un'altra ipotesi o risultato intermedio P si conclude l'assurdo.