Analisi Matematica T-2 - Ingegneria Informatica (0954)
Corso tenuto da Davide Guidetti

Risposte alla teoria per l'esame orale

Appunti di Andrei Daniel Ivan per l'anno accademico 2022/2023

1 Funzioni di più variabili reali

1. **Come si definiscono le operazioni di somma e prodotto per uno scalare in $\mathbb{R}^n$?**

   Dati $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ elementi di $\mathbb{R}^n$, definiamo la somma per uno scalare come $x + y := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.

   Sia poi $\lambda \in \mathbb{R}$. Per $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, definiamo il prodotto per uno scalare $\lambda x := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

2. **Quali sono le loro principali proprietà?**

   Le proprietà di somma e prodotto per uno scalare valgono $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e sono:

   (a) proprietà commutativa della somma: $y + x = x + y$;
   (b) proprietà associativa della somma: $x + (y + z) = (x + y) + z$;
   (c) esistenza di un elemento neutro per la somma: posto $O := (0, ..., 0)$, si ha $x + O = O + x = x$;
   (d) esistenza di un inverso additivo $\forall x \in \mathbb{R}^n$: dato $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $-x$ l'elemento $(-x_1, ..., -x_n)$. Allora $x + (-x) = (-x) + x = O$;
   (e) proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma tra scalari: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
   (f) proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma tra vettori: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
   (g) proprietà associativa del prodotto per uno scalare: $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
   (h) elemento neutro per il prodotto per uno scalare: $1x = x$.

3. **Come si definiscono il prodotto scalare e la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$?**

   Siano $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ elementi di $\mathbb{R}^n$. Definiamo come loro prodotto scalare e indichiamo col simbolo $\langle x, y\rangle$ oppure $x \cdot y$ il numero reale

   $$\langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1y_1 + ... + x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j$$

   Sia $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\|x\|$ e chiamiamo norma euclidea di x il numero reale

   $$\|x\| := \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

4. **Quali sono le loro principali proprietà?**

   Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, x, y, z elementi di $\mathbb{R}^n$. Le proprietà del prodotto scalare sono:

   (a) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
   (b) $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y)$;
   (c) $y \cdot x = x \cdot y$;
   (d) $x \cdot x \geq 0$;
   (e) $x \cdot x = 0$ se e solo se $x = O$.

   Siano x e y elementi di $\mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Le proprietà della norma euclidea sono:

   (a) $\|x\| \geq 0$;
   (b) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = O$;
   (c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
   (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
   (e) $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$;
   (f) Se $x = (x_1, ..., x_k, ..., x_n)$, $|x_j| \leq \|x\|$ per ogni $j = 1, ..., n$.

5. **In cosa consiste la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?**

   Siano x e y elementi di $\mathbb{R}^n$. Allora $|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

6. **Come si definisce la distanza (o metrica) euclidea in $\mathbb{R}^n$?**

   Siano x e y elementi di $\mathbb{R}^n$. La metrica euclidea in $\mathbb{R}^n$ è una funzione da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ ed è definita come $d(x, y) := \|x - y\|$.

7. **Quali ne sono le principali proprietà?**

   Siano x, y, z generici elementi di $\mathbb{R}^n$. Allora

   (a) $d(x, y) \geq 0$;

   (b) $d(y, x) = d(x, y)$;

   (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

8. **Come si definiscono le palle aperte e che cosa si intende per interno di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e per sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$?**

   Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Una palla aperta di centro x e raggio r è definita come $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = \|x - y\| < r\}$.

   Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Diremo che x_0 appartiene all'interno di A (e scriveremo $x_0 \in \mathring{A}$) se esiste una palla aperta $B(x_0, r)$, con $r > 0$, tale che $B(x_0, r) \subseteq A$.

   Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che A è aperto se $A = \mathring{A}$.

9. **Che cosa si intende per frontiera di $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e cosa si intende per sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$?**

   Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Diremo che x_0 appartiene alla frontiera di A, e scriveremo $x_0 \in Fr(A)$, se ogni palla aperta $B(x_0, r)$, con $r > 0$, contiene sia elementi appartenenti ad A, sia elementi non appartenenti ad A.

   Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che A è chiuso se $Fr(A) \subseteq A$.

10. **Come si caratterizzano gli aperti in termini di frontiera?**

    Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

    (a) A è aperto;

    (b) $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

11. **Che cosa si intende per chiusura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$?**

    Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo chiusura di A e indichiamo col simbolo $\overline{A}$ l'insieme $\overline{A} := A \cup Fr(A)$.

12. **Che cosa si intende per punto di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$?**

    Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Diremo che x^0 è un punto di accumulazione per A se $\forall r > 0$ $A \cap B(x^0, r)$ contiene qualche elemento distinto da x^0.

13. **Cosa significa la scrittura $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = l$ nel caso di $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$? (Precisare bene dove devono stare l e x_0).**

    Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x^0 \in D(A)$, $l \in \mathbb{R}^m$. Scriveremo $\lim\limits_{x \to x^0} f(x) = l$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che $\forall x \in A \cap B_n(x^0, \delta(\epsilon))$ con $x \neq x^0$ si ha $\|f(x) - l\|_m < \epsilon$.

14. **Esiste un risultato di unicità del limite?**

    Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x^0 \in D(A)$, $l, l' \in \mathbb{R}^m$. Supponiamo che valgano contemporaneamente $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x^0} f(x) = l'$. Allora $l = l'$.

15. **Come dipende l'esistenza e il valore del limite di f dall'esistenza e dal valore del limite delle componenti $f_1, ..., f_m$?**

    Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x^0 \in D(A)$, $f(x) = f_1(x), ..., f_m(x))$. Sia poi $l \in \mathbb{R}^m$, $l = (l_1, ...l_i, ..., l_m)$. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:

    (a) si ha $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$;

    (b) per ogni $i \in \{1, ..., m\}$, vale $\lim_{x \to x^0} f_i(x) = l_i$.

16. **Conoscete qualche risultato su limiti di somme, prodotti, quozienti?**

    Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$, $x^0 \in D(A)$, $l, m \in \mathbb{R}^m$ e valgono $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x^0} g(x) = m$. Allora:

    (a) esiste $\lim_{x \to x^0} (f(x) + g(x))$ e vale $l + m$;

    (b) se $m = 1$, esiste $\lim_{x \to x^0} (f(x) \cdot g(x))$ e vale $l \cdot m$;

    (c) supponiamo ancora $m = 1$ e, in più, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$ e $m \neq 0$; allora esiste $\lim_{x \to x^0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale $\frac{l}{m}$.

17. **Conoscete qualche risultato sui limiti delle restrizioni?**

    Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, con $A \subseteq B$, $f : B \to \mathbb{R}^m$ e $l \in \mathbb{R}^m$. Allora:

    (a) se $x^0 \in D(A)$, si ha anche $x^0 \in D(B)$;

    (b) sotto le ipotesi di (a), se vale $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$, si ha anche $\lim_{x \to x^0} f_{|A}(x) = l$;

    (c) se esiste $r > 0$ per cui si ha $(B(x^0, r) \cap B) \setminus \{x_0\} \subseteq A$ e vale $\lim_{x \to x^0} f_{|A}(x) = l$, si ha anche $\lim_{x \to x^0} f(x) = l$.

18. **Come si definisce la continuità in x_0 per $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$? (Precisare bene dove devono stare x_0.)**

    Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^m$. Diremo che f è continua in x_0 se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$ tale che $\forall x \in B_n(x_0, \delta(\epsilon)) \cap A$ si ha $\|f(x) - f(x_0)\|_m < \epsilon$.

    Diremo che f è continua in A se è continua in corrispondenza di ogni $x_0 \in A$.

19. **Conoscete qualche risultato di collegamento tra continuità e limiti?**

    Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^m$. Allora:

    (a) se $x^0 \in A \setminus D(A)$, f è continua in x^0;

    (b) se $x^0 \in A \cap D(A)$, f è continua in x^0 se e solo se esiste $\lim_{x \to x^0} f(x)$ e coincide con $f(x^0)$.

20. **Che cosa si può dire sulla continuità di una funzione composta? Precisare il contesto.**

    Siano $n, m, l \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ tale che $f(A) \subseteq B$, $g : B \to \mathbb{R}^l$. Allora:

    (a) sia $x^0 \in A$ tale che f è continua in x^0 e g è continua in $f(x^0)$. Allora $g \circ f$ è continua in x^0;

    (b) se f e g sono continue, lo è anche $g \circ f$.

21. **Che cosa significa dire che un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ è limitato?**

    Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Diremo che A è limitato se esiste $M \geq 0$ tale che $\|x\| \leq M$ $\forall x \in A$.

22. **Conoscete qualche generalizzazione del teorema di Weierstrass per funzioni di più variabili?**

    Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, chiuso e limitato, $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua. Allora:

    (a) $f(A)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^m$;

    (b) se $m = 1$, f ammette minimo e massimo.

23. **Che cosa significa dire che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso per archi?**

    Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Diremo che A è connesso per archi se, comunque si prendano x e y in A, esistono a e b reali con $a \leq b$ e $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua, tali che:

    (a) $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$;

    (b) $\phi([a, b]) \subseteq A$.

24. **Dati x e y in $\mathbb{R}^n$, che cosa si intende per segmento di estremi x e y e che cosa significa dire che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso?**

    Siano x e y in $\mathbb{R}^n$. Poniamo $[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$. Chiameremo $[x, y]$ il segmento con estremi x e y.

    Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, diremo che A è convesso se, comunque si prendano x e y in A, $[x, y] \subseteq A$.

25. **Quali sono i sottoinsiemi connessi per archi di $\mathbb{R}$?**

    Gli intervalli.

26. **Conoscete qualche generalizzazione del teorema di Bolzano a funzioni di più variabili e che cosa comporta questo risultato nel caso di funzioni a valori reali?**

    Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi, $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua. Allora:

    (a) $f(A)$ è connesso per archi in $\mathbb{R}^m$;

    (b) se $m = 1$, $f(A)$ è un intervallo.

2 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali

1. **Come si definisce la derivata rispetto al vettore ν $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$? (Precisare bene tutte le condizioni su f, il suo dominio A, x^0 e ν).**

   Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$. Poniamo $A_{x^0,\nu} := \{t \in \mathbb{R} : x^0 + t\nu \in A\}$.

   Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Per $t \in A_{x^0,\nu} \setminus \{0\}$, poniamo $r_{x^0,\nu}(t) := \frac{f(x^0+t\nu)-f(x^0)}{t}$ e supponiamo che $0 \in D(A_{x^0,\nu})$. Se esiste

   $$\lim_{t\to 0} r_{x^0,\nu}(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + t\nu) - f(x^0)}{t},$$

   lo chiameremo derivata di f rispetto al vettore ν in x^0 e lo indicheremo con la notazione $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x^0)$.

2. **Come si definiscono le derivate parziali del primo ordine $D_j f(x^0)$?**

   Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, $x^0 \in A$, tale che $0 \in D(A_{x^0,e^j})$. Chiamiamo derivata parziale prima rispetto alla variabile x_j nel punto x^0 la derivata $\frac{\partial f}{\partial e^j}(x^0)$ (se esiste). Tale derivata sarà indicata con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)$ o con il simbolo $D_j f(x^0)$.

3. **L'esistenza delle derivate parziali del primo ordine e delle derivate direzionali implica la continuità della funzione?**

   Per funzioni di più variabili, l'esistenza di tutte le derivate parziali prime finite in un punto non implica la continuità della funzione in quel punto.

4. **Dare la definizione di f di classe C^1 sull'aperto A.**

   Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$. Diremo che f è di classe C^1 in A ($f \in C^1(A)$), se $\forall x \in A$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$ esiste a valori reali $D_j f(x)$. Inoltre le funzioni f, $D_1 f, ..., D_n f$ sono continue su A.

5. **Che cosa dice il teorema del differenziale totale?**

   Siano A un aperto in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$, $x \in A$, $\nu \in \mathbb{R}^n$. Allora esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x)$ e

   $$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla f(x) \cdot \nu = \sum_{j=1}^{n} D_j f(x)\nu_j$$

6. **Conoscete qualche generalizzazione del teorema del valor medio per funzioni di più variabili?**

   Siano A un aperto in $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $f \in C^1(A)$, x e y in A tali che $[x, y] \subseteq A$. Allora esiste $z \in [x, y]$, tale che $f(y) - f(x) = \nabla f(z) \cdot (y - x)$.

7. **Come si definiscono le derivate parziali di ordine superiore al primo?**

   Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. Poniamo $A_j := \{x \in A : \exists\, D_j f(x) \in \mathbb{R}\}$.

   Su A_j è definita la funzione $D_j f$, che associa a ogni elemento x di A_j la derivata $D_j f(x)$. Se $x \in A_j$ e $1 \leq i \leq n$, può esistere la derivata $D_i(D_j f)(x)$ di $D_j f$ in x. Essa viene chiamata derivata seconda di f in x rispetto alle variabili x_i, x_j (nell'ordine) e viene indicata con uno dei simboli $D_{ij} f(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ ($D_j^2 f(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)$ se $i = j$).

   Iterando il procedimento, si possono definire le derivate terze, quarte, ecc. (o derivate di ordine 3, 4, ecc.). Dato $k \in \mathbb{N}$, $j_1, j_2, ..., j_k \in \{1, ..., n\}$, non necessariamente a due a due distinti, porremo $D_{j_1,j_2,...,j_k} f(x) = D_{j_1}(D_{j_2}(...(D_{jk} f))...)(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} ... \partial x_{j_k}}(x)$.

8. **Che cosa vuol dire che una funzione è di classe C^k?**

   Siano A un aperto di $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $f : A \to \mathbb{R}$. Diremo che f è di classe C^k $(k \in \mathbb{N})$ se possiede a valori reali tutte le derivate parziali di ordine non superiore a k in ogni punto di A e tali derivate sono continue in A. Scriveremo, per indicare tale eventualità, $f \in C^k(A)$. Se $f \in C^k(A)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (e quindi possiede derivate parziali continue di ogni ordine), scriveremo $f \in C^\infty(A)$.

9. **Che cosa dice il teorema di Schwarz?**

   Siano A un aperto in $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $f : A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$. Supponiamo che, $\forall x \in A$, siano definite e a valori reali $D_i f(x)$, $D_j f(x)$, $D_{ij} f(x)$, $D_{ji} f(x)$. Sia poi x^0 in A, tale che $D_{ij} f$ e $D_{ji} f$ sono continue in x^0. Allora $D_{ij} f(x^0) = D_{ji} f(x^0)$.

10. **Quali conseguenze ha questo teorema sull'eguaglianza di derivate di ordine superiore al primo?**

    Dal teorema di Schwarz, segue subito che, se $f \in C^2(A)$, con A aperto in $\mathbb{R}^n$, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, si ha $D_{ij} f = D_{ji} f$. Più in generale, se $f \in C^k(A)$, due derivate qualunque di ordine non superiore a k, che si ottengono applicando lo stesso numero di volte le singole derivate parziali del primo ordine, coincidono.

11. **In cosa consiste la formula di Taylor per funzioni di più variabili?**

    Siano A un aperto in $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(A)$, $x^0 = (x^0_1, ..., x^0_n) \in A$. Introduciamo il seguente polinomio di n variabili reali:

$$P(x_1, ..., x_n) = f(x^0) + \sum_{j=1}^{n} D_j f(x^0)(x_j - x^0_j) + ...+$$

$$+\frac{1}{i!} \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_i=1}^{n} D_{j_1,...,j_i} f(x^0)(x_{j_1} - x^0_{j_1})...(x_{j_i} - x^0_{j_i}) + ...+$$

$$+\frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^{n} ... \sum_{j_k=1}^{n} D_{j_1,...,j_k} f(x^0)(x_{j_1} - x^0_{j_1})...(x_{j_k} - x^0_{j_k})$$

    Chiamiamo P polinomio di Taylor di grado non superiore a k con punto iniziale x^0 per f. Allora $f - P = o(\|x - x^0\|^k)$ per $x \to x^0$, nel senso che vale

$$\lim_{x \to x^0} \frac{f(x) - P(x)}{\|x - x^0\|^k} = 0$$

12. **Che cosa si intende per punto di massimo (minimo) relativo per una funzione di più variabili?**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x^0 \in A$. Diremo che x^0 è un punto di minimo (massimo) relativo per f se esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$, tale che $f(x^0) \leq f(x)$ (risp. $f(x^0) \geq f(x)$) $\forall x \in A \cup B(x^0, \delta)$.

    Chiameremo estremanti relativi di f i suoi punti di massimo o minimo relativo.

13. **Che cos'è un punto critico e qual è il legame tra punti critici ed estremanti relativi? (Precisare bene tutte le ipotesi sulla funzione)**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1(A)$, $x^0 \in A$. Diremo che x^0 è un punto critico di f se $\nabla f(x^0) = O$.

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^1(A)$, $x^0 \in A$. Supponiamo che x^0 sia un estremante relativo di f. Allora x^0 è un punto critico di f.

14. **Che cosa si intende per punto di sella?**

    Data $f \in C^1(A)$, con A aperto in R^n, chiameremo punti di sella di f i suoi punti critici che non sono estremanti relativi.

15. **Conoscete delle condizioni necessarie (sufficienti) affinché un punto critico sia un estremante relativo?**

Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$, $x^0 \in A$.

Sia $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con

$$Q(h_1, ..., h_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} f(x^0) h_i h_j$$

detta forma quadratica. Allora:

(a) se x^0 è un punto critico di f e la forma quadratica Q è definita positiva ($Q(h) > 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$), x^0 è un punto di minimo relativo per f;

(b) se x^0 è un punto critico di f e la forma quadratica Q è definita negativa ($Q(h) < 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$), x^0 è un punto di massimo relativo per f.

16. **Come si generalizzano le definizioni di derivata direzionale e derivata parziale al caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$?**

Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$. Per $t \in A_{x^0,v} \setminus \{0\}$, poniamo $r_{x^0,v}(t) := \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t}$ e supponiamo che $0 \in D(A_{x^0,v})$. Se esiste $\lim\limits_{t\to 0} r_{x^0,v}(t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x^0+tv)-f(x^0)}{t}$ lo chiameremo derivata di f rispetto al vettore v in x^0 e lo indicheremo con la notazione $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$.

Nel caso $v = e^j$ (j-esimo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^n$), parleremo di derivata parziale prima rispetto alla variabile x_j.

17. **Che rapporto c'è tra la derivata della funzione e le derivate delle componenti?**

Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$.

$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ esiste se e solo se, per ciascun $i = 1, ..., m$, esistono a valori reali le derivate $\frac{\partial f_i}{\partial v}(x^0)$. Si ha inoltre $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(x^0), ..., \frac{\partial f_m}{\partial v}(x^0)\right)$; in particolare, per $j = 1, ..., n$, si ha

$$D_j f(x^0) = \left(D_j f_1(x^0), ..., D_j f_m(x^0)\right)$$

18. **Che cosa vuol dire che una funzione a valori in $\mathbb{R}^m$ è di classe C^k?**

Siano $m, n \in \mathbb{N}$, A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$. Diremo che f è di classe C^k, con $k \in \mathbb{N}$, se possiede a valori reali tutte le derivate parziali di ordine non superiore a k in ogni punto di A e tali derivate sono continue in A. Scriveremo, per indicare tale eventualità, $f \in C^k(A; \mathbb{R}^m)$.

19. **Come si definisce la matrice jacobiana?**

Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$, $x^0 \in A$. Chiamiamo matrice jacobiana di f in x^0, e indichiamo con la notazione $J_f(x^0)$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ ... & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}$$

20. **Come si definisce la derivata di una funzione di una variabile a valori in $\mathbb{R}^m$?**

Siano $m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $t^0 \in A \cap D(A)$. Sia poi $f : A \to \mathbb{R}^m$. Per $t \in A \setminus \{t^0\}$, poniamo $r_{x^0}(t) := \frac{f(t)-f(t^0)}{t-t^0}$. Se esiste $\lim\limits_{t\to t^0} r_{x^0}(t) = \lim\limits_{t\to t^0} \frac{f(t)-f(t^0)}{t-t^0}$, lo chiameremo derivata di f in t^0 e lo indicheremo con una delle notazioni $\frac{df}{dt}(x^0)$, $f'(t^0)$, $Df(t^0)$. In tal caso, si dice che f è derivabile in t^0.

21. **Come dipende dalle derivate delle componenti?**

    Se $f(t) = (f_1(t), ..., f_m(t))$, f è derivabile in t_0 se e solo se ciascuna delle funzioni $f_1, ..., f_m$ è derivabile in t^0. In tal caso, si ha $f^{'}(t^0) = (f_1^{'}(t^0), ..., f_m^{'}(t^0))$.

22. **Conoscete un teorema di derivazione di funzioni composte ("chain rule")?**

    Siano m, n naturali, A aperto in $\mathbb{R}^n$, B aperto in $\mathbb{R}^m$, $g \in C^1(A)$, $f \in C^1(B; \mathbb{R}^n)$, tale che $f(B) \subseteq A$. Allora:

    (a) $g \circ f \in C^1(B)$;

    (b) $\forall x \in B$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, si ha

    $$D_i(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot D_i f(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j g(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

23. **Che cosa si può dire della composizione di funzioni di classe C^k?**

    Siano m, n naturali, A aperto in $\mathbb{R}^n$, B aperto in $\mathbb{R}^m$, $g \in C^k(A)$, $f \in C^k(B; \mathbb{R}^n)$, tale che $f(B) \subseteq A$. Allora $g \circ f \in C^k(B)$.

24. **Enunciare il teorema delle funzioni implicite di Dini.**

    Siano $m, n \in \mathbb{N}$, con $m < n$, A aperto in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$.

    Siano poi $x^0 = (x_1^0, ..., x_{n-m}^0, x_{n-m+1}^0, ..., x_n^0) \in A$, tale che $f(x^0) = O$. Supponiamo che la matrice jacobiana $J_f(x^0)$ abbia rango massimo ($= m$) e che il minore costituito dalle ultime m righe e colonne abbia determinante diverso da 0. Allora esistono A_1 e A_2 aperti in $\mathbb{R}^{n-m}$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente, tali che:

    (a) $(x_1^0, ..., x_{n-m}^0) \in A_1$, $(x_{n-m+1}^0, ..., x_n^0) \in A_2$;

    (b) $A_1 \times A_2 \subseteq A$;

    (c) $\forall (x_1, ..., x_{n-m}) \in A_1$ esiste unico $\phi(x_1, ..., x_{n-m}) = (\phi_1(x_1, ..., x_{n-m}), ..., \phi_m(x_1, ..., x_{n-m})) \in A_2$ tale che $f(x_1, ..., x_{n-m}, \phi_1(x_1, ..., x_{n-m}), ..., \phi_m(x_1, ..., x_{n-m})) = O$;

    (d) la funzione ϕ è di classe C^1 e, se $f \in C^k(A; \mathbb{R}^m)$ con $k \in \mathbb{N}$, $\phi \in C^k(A_1; \mathbb{R}^m)$.

25. **Enunciare il teorema di invertibilità locale.**

    Siano A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$, $x^0 \in A$. Supponiamo che la matrice jacobiana $J_f(x^0)$ abbia determinante diverso da 0. Allora esistono A_1 e A_2 aperti in $\mathbb{R}^n$, tali che:

    (a) $A_1 \subseteq A$, $x^0 \in A_1$, $f(x^0) \in A_2$;

    (b) se $g := f_{|A_1}$, g è una biiezione tra A_1 e A_2;

    (c) $g^{-1} : A_2 \to A_1$ è di classe C^1 e, se $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$ con $k \geq 1$, anche g^{-1} è di classe C^k.

26. **Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.**

    Siano m, n naturali con $m < n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $g \in C^1(A; \mathbb{R}^m)$, $g(x) = (g_1(x), ..., g_m(x))$ $\forall x \in A$, $f \in C^1(A)$. Sia $V := \{x \in A : g(x) = O\}$.

    Supponiamo che, $\forall x \in V$ la matrice jacobiana $J_g(x)$ abbia rango massimo ($= m$). Allora, se $x^0 \in V$ è un estremante relativo per $f_{|V}$, $\nabla f(x^0)$ è combinazione lineare dei vettori $\nabla g_1(x^0), ..., \nabla g_m(x^0)$.

3 Equazioni differenziali ordinarie

1. **Qual è la forma di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine e che cosa si intende per soluzione locale di un sistema di questo tipo?**

   Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Nel caso di equazioni differenziali del primo ordine si usa il termine "sistema" invece di "equazione" riferendosi al fatto che l'espressione $x^{'}(t) = f(t, x(t))$ è equivalente a

   $$\begin{cases} x_1^{'}(t) = f_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ ... \\ x_n^{'}(t) = f_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases}$$

   ove, naturalmente, $f_1, ..., f_n$ sono le componenti di f e $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{n+1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Una soluzione locale dell'equazione $x^{'}(t) = f(t, x(t))$ è una funzione $x : I \to \mathbb{R}^n$, tale che:

   (a) I è un intervallo in $\mathbb{R}$ con interno non vuoto;
   (b) x è derivabile una volta in I;
   (c) $\forall t \in I$, $(t, x(t)) \in \Omega$ e vale $x^{'}(t) = f(t, x(t))$.

2. **In cosa consiste il problema di Cauchy per questi sistemi (precisare bene come devono essere presi i dati)?**

   Il problema di Cauchy consiste nel determinare le soluzioni locali dell'equazione differenziale $x^{'}(t) = f(t, x(t))$ che, in un prefissato t_0, assumono un prefissato valore x^0.

   Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, tali che $(t_0, x^0) \in \Omega$. Per soluzione locale del problema di Cauchy

   $$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

   intendiamo una soluzione locale x dell'equazione $x^{'}(t) = f(t, x(t))$, di dominio I, tale che $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x^0$.

3. **Che cosa dice il teorema di Picard?**

   Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, tali che $(t_0, x^0) \in \Omega$. Supponiamo inoltre che:

   (a) f sia continua;
   (b) se indichiamo con $x_1, ..., x_n$ le variabili successive a t, $\forall (t, x) \in \Omega$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$, esista la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, x)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sia continua in Ω.

   Considerando il problema di Cauchy, allora:

   (a) esiste una soluzione locale, definita su un intervallo aperto contenente t_0;
   (b) due soluzioni locali qualunque del problema di Cauchy coincidono sull'intersezione dei loro domini.

4. **Che cosa dice il teorema di Peano?**

   Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, tali che $(t_0, x^0) \in \Omega$. Supponiamo inoltre che f sia continua. Considerando il problema di Cauchy, allora esiste una soluzione locale definita su un intervallo aperto contenente t_0.

5. **Che cosa si intende per soluzione massimale di un sistema?**

   Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{nm+1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Una soluzione locale x dell'equazione $x^{(m)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t))$ si dice massimale se non esiste un'altra soluzione locale y che sia prolungamento proprio di x (tale, cioè, che x sia una restrizione di y e il dominio di x non coincida con il dominio di y).

6. **Che cosa si può dire delle soluzioni massimali nelle ipotesi del teorema di Picard?**

   Siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Picard. Sia poi $x : I =]a_0, a_1[\to \mathbb{R}^n$ una soluzione locale del sistema $x^{'}(t) = f(t, x(t))$, con $-\infty \leq a_0 < a_1 \leq +\infty$. Allora sono equivalenti:

   (a) x non è una soluzione massimale di $x^{'}(t) = f(t, x(t))$;

   (b) per almeno un $j \in \{0, 1\}$ esiste $\lim_{t \to a_j} (t, x(t))$ e tale limite appartiene a Ω.

7. **Qual è la forma di un'equazione differenziale scalare di ordine m e in cosa consiste il problema di Cauchy per queste equazioni (precisare bene come devono essere presi i dati)?**

   Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{nm+1}$ con $n, m \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Un'equazione differenziale scalare di ordine m ha forma $x^{(m)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t))$.

   Siano inoltre $t_0 \in \mathbb{R}$, $y^0, ..., y^{m-1}$ elementi di $\mathbb{R}^n$, tali che $(t_0, y^0, ..., y^{m-1}) \in \Omega$. Il problema di Cauchy relativo a $x^{(m)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t))$, con le condizioni iniziali $y^0, ..., y^{m-1}$ assegnate in t_0, consiste nel determinare le soluzioni locali x di $x^{(m)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t))$, tali che, in più verificano le seguenti condizioni:

   (a) t_0 appartiene al dominio di x;

   (b) $x(t_0) = y^0, ..., x^{(j)}(t_0) = y^j, ..., x^{(m-1)}(t_0) = y^{m-1}$.

8. **Che cosa si intende in questo caso per soluzione locale?**

   Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{nm+1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Una soluzione locale dell'equazione

   $$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t))$$

   è una funzione $x : I \to \mathbb{R}^n$, tale che:

   (a) I è un intervallo in $\mathbb{R}$ con interno non vuoto;

   (b) x è derivabile m volte in I;

   (c) $\forall t \in I$, $(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t)) \in \Omega$ e vale $x^{(m)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t))$.

9. **Conoscete un teorema di esistenza e (in un senso opportuno da precisarsi) di unicità di soluzioni locali?**

   Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^{nm+1}$ con $n, m \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y^0, ..., y^{m-1} \in \mathbb{R}^n$ tali che $(t_0, y^0, ..., y^{m-1}) \in \Omega$. Supponiamo inoltre che:

   (a) f sia continua;

   (b) se indichiamo con $X = (X_1, ..., X_{nm})$ $(\in \mathbb{R}^{nm})$ il blocco delle variabili successive a t in $\mathbb{R}^{nm+1}$, $\forall (t, X) \in \Omega$, $\forall j \in \{1, ..., nm\}$, esista la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial X_j}(t, X)$ e $\frac{\partial f}{\partial X_j}$ sia continua in Ω.

   Consideriamo il problema di Cauchy

   $$\begin{cases} x^{(m)}(t) = f(t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t)) \\ x(t_0) = y^0 \\ ... \\ x^{(m-1)}(t_0) = y^{m-1} \end{cases}$$

   Allora

   (a) esiste una soluzione locale, definita su un intervallo aperto contenente t_0;

   (b) due soluzioni locali qualunque del problema di cauchy coincidono sull'intersezione dei loro domini.

10. **Sotto le ipotesi del risultato precedente che cosa si può dire sulle soluzioni massimali?**

Siano soddisfatte le ipotesi del teorema (risposta) precedente. Allora il problema di Cauchy possiede un'unica soluzione massimale. Tale soluzione ha come dominio un intervallo aperto in $\mathbb{R}$.

Sia poi $x : I =]a_0, a_1[\to \mathbb{R}^n$ una soluzione locale del problema di Cauchy, con $-\infty \leq a_0 < a_1 \leq +\infty$. Allora sono equivalenti:

(a) x non è una soluzione massimale del problema di Cauchy;

(b) per almeno un $j \in \{0, 1\}$ esiste $\lim\limits_{t \to a_j} (t, x(t), ..., x^{(m-1)}(t))$ e tale limite appartiene a Ω.

4 Misura e integrazione in $\mathbb{R}^n$

1. **Come si definisce relazione di ordine, somma e prodotto in $[0, +\infty]$?**

   Poniamo $[0, +\infty] := [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$, ove $+\infty$ è un oggetto non appartenente a $[0, +\infty[$. Ammettiamo che $a < +\infty$ $\forall a \in [0, +\infty[$.

   Dati a e b in $[0, +\infty]$, la scrittura $a \leq b$ significherà che $a < b$, oppure $a = b$.

   $a + b$ e ab hanno il solito significato nel caso di a e b in $[0, +\infty[$, mentre dato $a \in [0, +\infty]$, $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ e

   $$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \neq 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

2. **Come si definisce la somma di una serie in $[0, +\infty]$?**

   Data una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in $[0, +\infty]$, la somma di una serie è definita come

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

3. **Che cosa si intende per lunghezza di un intervallo limitato in $\mathbb{R}$?**

   Sia I un intervallo limitato in $\mathbb{R}$. Poniamo

   $$l(I) := \begin{cases} sup(I) - inf(I) & \text{se } I \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } I = \emptyset \end{cases}$$

   Chiameremo $l(I)$ lunghezza dell'intervallo I.

4. **che cosa si intende per intervallo n-dimensionale e per volume n-dimensionale di un intervallo n-dimensionale?**

   Sia $I \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Diremo che I è un intervallo n-dimensionale se esistono $I_1, ..., I_n$ intervalli limitati in $\mathbb{R}$, tali che $I = I_1 \times ... \times I_n$ (prodotto cartesiano).

   Sia I un intervallo n-dimensionale, $I = I_1 \times ... \times I_n$ e $I_1, ..., I_n$ intervalli limitati in $\mathbb{R}$. Chiamiamo volume n-dimensionale di I e indichiamo con la scrittura $vol_n(I)$, il numero reale $vol_n(I) = l(I_1) \cdot ... \cdot l(I_n)$.

5. **Che cosa si intende per misura esterna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$?**

   Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. dato E generico sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, poniamo

   $$L_n^*(E) := inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} vol_n(I^k) : E \subseteq U_{k \in \mathbb{N}} I^k\right\}$$

   Chiameremo $L_n^*(E)$ misura esterna di E.

6. **Quali sono le principali proprietà della misura esterna?**

   Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora

   (a) se I è un intervallo n-dimensionale, si ha $L_n^*(I) = vol_n(I)$;

   (b) $L_n^*(\emptyset) = 0$;

   (c) se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha $L_n^*(A) \leq L_n^*(B)$;

   (d) se $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E^k \subseteq \mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e $E \subseteq U_{k \in \mathbb{N}} E^k$, si ha $L_n^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L_n^*(E^k)$;

   (e) se $m \in \mathbb{N}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E^k \subseteq \mathbb{R}^n$ $\forall k \in \{1, ..., m\}$ e $E \subseteq \cup_{1 \leq k \leq m} E^k$, si ha $L_n^*(E) \leq \sum_{k=1}^{m} L_n^*(E^k)$.

7. **A che cosa è uguale la misura esterna di un intervallo n-dimensionale?**

   Se I è un intervallo n-dimensionale, si ha $L_n^*(I) = vol_n(I)$.

8. **Come si definiscono gli insiemi misurabili secondo Lebesgue?**

   Siano $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che A è misurabile secondo Lebesgue se, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha $L_n^*(E) = L_n^*(E \cap A) + L_n^*(E \cap A^c)$. Indicheremo con $\mathcal{M}_n$ la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

9. **Che cos'è la misura di Lebesgue?**

   Sia $n \in \mathbb{N}$. Indichiamo con L_n la restrizione della funzione misura esterna L_n^* a $\mathcal{M}_n$. Chiameremo L_n misura di Lesbesgue in $\mathbb{R}^n$.

10. **Quali sono le principali proprietà della classe degli insiemi misurabili e della misura rispetto a unioni, intersezioni, differenze?**

    Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora:

    (a) $\emptyset \in \mathcal{M}_n$;
    (b) se $A \in \mathcal{M}_n$, allora $A^c \in \mathcal{M}_n$;
    (c) se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{M}_n$, allora $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}_n$;
    (d) $L_n(\emptyset) = 0$;
    (e) se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{M}_n$ a due a due disgiunti, si ha

    $$L_n(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} L_n(A_k)$$

    Si ha inoltre:

    (a) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_n$;
    (b) se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{M}_n$, allora $\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}_n$;
    (c) se $m \in \mathbb{N}$ e $A_1, ..., A_m$ sono elementi di $\mathcal{M}_n$, allora $\cup_{k\in\{1,...,m\}} A_k \in \mathcal{M}_n$;
    (d) se $m \in \mathbb{N}$ e $A_1, ..., A_m$ sono elementi di $\mathcal{M}_n$, allora $\cap_{k\in\{1,...,m\}} A_k \in \mathcal{M}_n$;
    (e) se A e B sono elementi di $\mathcal{M}_n$, allora $B \setminus A \in \mathcal{M}_n$;
    (f) se $m \in \mathbb{N}$ e $A_1, ..., A_m$ sono elementi di $\mathcal{M}_n$ a due a due disgiunti,

    $$L_n(\cup_{k\in\{1,...,m\}} A_k) = \sum_{k=1}^{m} L_n(A_k)$$

    (g) se A e B sono elementi di $\mathcal{M}_n$, $A \subseteq B$ e $L_n(B) < +\infty$, allora $L_n(A) < +\infty$ e vale $L_n(B \setminus A) = L_n(B) - L_n(A)$.

11. **Conoscete delle condizioni che assicurino che un insieme sia misurabile?**

    Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora:

    (a) ogni intervallo n-dimensionale appartiene a $\mathcal{M}_n$;
    (b) ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ appartiene a $\mathcal{M}_n$;
    (c) ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ appartiene a $\mathcal{M}_n$;
    (d) se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $L_n^*(A) = 0$, allora $A \in \mathcal{M}_n$.

12. **Che cos'è una funzione semplice?**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Diremo che f è una funzione semplice se esistono $A_1, ..., A_m$ ($m \in \mathbb{N}$), sottoinsiemi misurabili di A a due a due disgiunti, con unione A, e dei numeri reali $\alpha_1, ..., \alpha_m$, tali che, se $x \in A_i$ $(1 \leq i \leq m)$, $f(x) = \alpha_i$.

13. **Quali sono le proprietà della classe delle funzioni semplici rispetto a somme, prodotti e quozienti?**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ semplici. Allora:

    (a) $f + g$ e fg sono semplici;

    (b) se $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, $\frac{f}{g}$ è semplice.

14. **Come si definisce l'integrale di una funzione semplice non negativa?**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f : A \to \mathbb{R}$ semplice, a valori non negativi. Allora esistono $A_1, ..., A_m$ ($m \in \mathbb{N}$), sottoinsiemi misurabili di A a due a due disgiunti, con unione A, e dei numeri reali $\alpha_1, ..., \alpha_m$, tali che, se $x \in A_i$ $(1 \leq i \leq m)$, $f(x) = \alpha_i$. Poniamo

    $$\int_A f(x)\,dx := \alpha_1 L_n(A_1) + ... + \alpha_m L_n(A_m) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i L_n(A_i)$$

    Chiameremo $\int_A f(x)\,dx$ integrale (nel senso di Lebesgue) di f su A.

15. **Quali sono le principali proprietà dell'integrale di una funzione semplice non negativa?**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ semplici non negative. Allora:

    (a) $\int_A f(x)\,dx \in [0, +\infty]$;

    (b) se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$, allora $\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx$;

    (c) $f + g$ è semplice non negativa e $\int_A (f + g)(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx$;

    (d) se $\alpha \in [0, +\infty[$, αf è semplice non negativa e $\int_A \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_A f(x)\,dx$;

    (e) se $B = B_1 \cup ... \cup B_p$ ($p \in \mathbb{N}$), con $B_1, ..., B_p$ misurabili a due a due disgiunti, $\int_A f(x)\,dx = \int_{B_1} f(x)\,dx + ... + \int_{B_p} f(x)\,dx$, con $\int_{B_j} f(x)\,dx := \int_{B_j} f_{|B_j}(x)\,dx$ $(1 \leq j \leq p)$.

16. **Come si definiscono le funzioni misurabili?**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Diremo che f è misurabile se esiste una successione $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici di dominio A, tali che $\forall x \in A$, $f(x) = \lim_{k \to +\infty} \phi_k(x)$.

17. **Che cosa si può dire di somme, prodotti e quozienti di funzioni misurabili?**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ misurabili, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $c \in \mathbb{R}$. Allora:

    (a) $f + g$ e fg sono misurabili;

    (b) se $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A$, $\frac{f}{g}$ è misurabile;

    (c) $h \circ f$ è misurabile;

    (d) cf è misurabile.

18. **Conoscete un risultato di misurabilità per le funzioni continue?**

    Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è misurabile.

19. **Come si definisce l'integrale di una funzione misurabile non negativa?**

Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f : A \to [0, +\infty]$ misurabile. Poniamo

$$\int_A f(x)\, dx := sup \left\{ \int_A \phi(x)\, dx : \phi : A \to \mathbb{R} \text{ semplice}, 0 \leq \phi(x) \leq f(x)\ \forall x \in A \right\}$$

Chiamiamo $\int_A f(x)\, dx$ integrale di f su A nel senso di Lebesgue.

20. **Quali ne sono le principali proprietà?**

Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f, g : A \to [0, +\infty[$, misurabili. Allora:

(a) $\int_A f(x)\, dx \in [0, +\infty]$;

(b) se $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A$, allora $\int_A f(x)\, dx \leq \int_A g(x)\, dx$;

(c) $\int_A (f + g)(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx + \int_A g(x)\, dx$;

(d) se $\alpha\ \in [0, +\infty[$, $\int_A \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_A f(x)\, dx$;

(e) se $A = A_1 \cup ... \cup A_p$ $(p \in \mathbb{N})$, con $A_1, ..., A_p$ misurabili a due a due disgiunti, $\int_A f(x)\, dx = \int_{A_1} f(x)\, dx + ... + \int_{A_p} f(x)\, dx$, con $\int_{A_j} f(x)\, dx := \int_{A_j} f_{|A_j}(x)\, dx$ $(1 \leq j \leq p)$.

21. **Come si definiscono le funzioni sommabili e l'integrale di una funzione sommabile?**

Poniamo $\phi_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi_+(x) = max\{x, 0\}$ e $\phi_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi_-(x) = max\{-x, 0\}$. Poniamo inoltre $f_\pm := \phi_\pm \circ f$.

Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f : A \to \mathbb{R}$ misurabile. Diremo che f è sommabile se $\int_A |f(x)|\, dx < +\infty$. In tal caso, poniamo $\int_A f(x)\, dx := \int_A f_+(x)\, dx - \int_A f_-(x)\, dx$.

22. **Quali sono le principali proprietà e regole di calcolo per integrali delle funzioni sommabili?**

Siano $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, sommabili. Allora:

(a) se $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A$, allora $\int_A f(x)\, dx \leq \int_A g(x)\, dx$;

(b) $f + g$ è sommabile e $\int_A (f + g)(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx + \int_A g(x)\, dx$;

(c) se $\alpha\ \in \mathbb{R}$, αf è sommabile e $\int_A \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_A f(x)\, dx$;

(d) sia $A = A_1 \cup ... \cup A_p$ $(p \in \mathbb{N})$, con $A_1, ..., A_p$ misurabili a due a due disgiunti. Allora $\int_A f(x)\, dx = \int_{A_1} f(x)\, dx + ... + \int_{A_p} f(x)\, dx$;

(e) viceversa, se f è sommabile su ciascuno degli insiemi $A_1, ..., A_p$, f è sommabile su A.

23. **Che cosa si può dire della sommabilità delle funzioni definite sugli insiemi di misura nulla?**

Sia $A \in \mathcal{M}_n$, con $L_n(A) = 0$, $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Allora:

(a) f è misurabile;

(b) se f è a valori in $[0, +\infty]$, $\int_A f(x)\, dx = 0$;

(c) se $f : A \to \mathbb{R}$, f è sommabile e $\int_A f(x)\, dx = 0$.

24. **Nel caso di un intervallo chiuso e limitato, che relazione c'è tra integrabilità secondo Riemann e sommabilità e tra i rispettivi integrali?**

Siano a e b in $\mathbb{R}$, con $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile nel senso di Riemann. Allora f è sommabile e l'integrale nel senso di Lebesgue di f coincide con l'integrale nel senso di Riemann.

25. **Conoscete una condizione sufficiente per sommabilità valido per un intervallo semiaperto?**

    Siano $-\infty < a < b \leq +\infty$, $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, non negativa e integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[a, c]$, con $a < c < b$. Allora:

    (a) esiste (eventualmente uguale a $+\infty$) $\lim\limits_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx$;

    (b) f è misurabile e $\int_{[a,b[} f(x)\,dx = \lim\limits_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx$.

26. **Conoscete un risultato che riconduce il calcolo della misura di un insieme al calcolo di integrali in dimensione più bassa?**

    Siano m e n numeri naturali, $A \in \mathcal{M}_{m+n}$. Allora:

    (a) per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^m$, $A_x \in \mathcal{M}_n$;

    (b) poniamo

$$\begin{cases} g : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty] \\ g(x) = \begin{cases} L_n(A_x) & \text{se } A_x \in \mathcal{M}_n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

    Allora g è misurabile, non negativa e $\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\,dx = L_{m+n}(A)$.

27. **Che cosa dice il teorema di Tonelli?**

    Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{m+n}$, $f : A \to [0, +\infty]$ misurabile, $B \in \mathcal{M}_m$, tale che $\{x \in \mathbb{R}^m : A_x \in \mathcal{M}_n, L_n(A_x) > 0\} \subseteq B$.

    Definiamo

$$\begin{cases} g : B \to [0, +\infty] \\ g(x) = \begin{cases} \int_{A_x} f(x, y)\,dy & \text{se } A_x \in \mathcal{M}_n, f(x, .) \text{ è misurabile in } A_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

    Allora g è misurabile e $\int_B g(x)\,dx = \int_A f(x, y)\,dx\,dy$.

28. **Che cosa dice il teorema di Fubini?**

    Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{m+n}$, $f : A \to \mathbb{R}$ sommabile, $B \in \mathcal{M}_m$, tale che $\{x \in \mathbb{R}^m : A_x \in \mathcal{M}_n, L_n(A_x) > 0\} \subseteq B$.

    Definiamo

$$\begin{cases} g : B \to \mathbb{R} \\ g(x) = \begin{cases} \int_{A_x} f(x, y)\,dy & \text{se } A_x \in \mathcal{M}_n, f(x, .) \text{ è misurabile in } A_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{cases}$$

    Allora g è sommabile su B e $\int_B g(x)\,dx = \int_A f(x, y)\,dx\,dy$.

29. **Che cos'è un cambiamento di variabile?**

    Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Diremo che T è un cambiamento di variabile se:

    (a) T è iniettiva;

    (b) T è di classe C^1;

    (c) $\forall x \in \Omega$, il determinante della matrice jacobiana $J_T(x)$ è diverso da 0.

30. **Che cosa dice il teorema del cambiamento di variabile per integrali multipli?**

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$. un cambiamento di variabile, $A \in \mathcal{M}_n$, $f : A \to [0, +\infty]$ oppure $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che $A \subseteq T(\Omega)$. Allora:

(a) $T^{-1}(A) \in \mathcal{M}_n$;

(b) f è integrabile su A se e solo se la funzione $x \to f(T(x)) \cdot |det(J_T(x))|$, di dominio $T^{-1}(A)$, è integrabile su $T^{-1}(A)$;

(c) nel caso ciò avvenga, $\int_A f(y)\, dy = \int_{T^{-1}(A)} f(T(x)) \cdot |det(J_T(x))|\, dx$.

31. **Come si inquadra in esso il teorema corrispondente visto in Analisi A?**

In Analisi A si aveva $n = 1$, quindi erano funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Di conseguenza, $|det(J_t(x))| = T^{'}(x)$ essendo $J_T(x)$ una matrice 1×1.

Il teorema del cambiamento di variabile diventa quindi:

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}$, $T : \Omega \to \mathbb{R}$. un cambiamento di variabile, $f : A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che $A \subseteq T(\Omega)$. Allora:

(a) f è integrabile su A se e solo se la funzione $x \to f(T(x)) \cdot T^{'}(x)$, di dominio $T^{-1}(A)$, è integrabile su $T^{-1}(A)$;

(b) nel caso ciò avvenga, $\int_A f(y)\, dy = \int_{T^{-1}(A)} f(T(x)) \cdot T^{'}(x)\, dx$.

5 Integrali curvilinei e campi vettoriali

1. **Come si definiscono un cammino continuo e un cammino continuo C^1 a tratti?**

   Un cammino (continuo) α è una funzione continua da J a $\mathbb{R}^n$, con J intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$.

   Se $J = [a, b]$, $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ ($\in \mathbb{R}^n$) si chiamano estremi del cammino.

   Se $\alpha \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$, si dice che è un cammino di classe C^1.

   Sia $J = [a, b]$. Diremo che α è C^1 a tratti se esistono $t_0, t_1, ..., t_k$, con $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$, tali che, per $j = 1, ..., k$, $\alpha_{[t_{j-1}, t_j]}$ è di classe C^1.

   L'immagine $\alpha(J)$ si chiama sostegno di α.

2. **Come si definisce l'integrale curvilineo di seconda specie $\int f \cdot d\alpha$?**

   Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $f : \alpha([a, b]) \to \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $t \to f(\alpha(t)) \cdot \alpha^{'}(t)$ sia sommabile in $[a, b]$. Allora poniamo

$$\int f \cdot d\alpha := \int_{[a,b]} f(\alpha(t)) \cdot \alpha^{'}(t)\, dt$$

   Chiamiamo $\int f \cdot d\alpha$ integrale curvilineo di seconda specie di f sul cammino α.

3. **Come si interpreta fisicamente questo integrale?**

   Consideriamo un punto pesante che si muove di moto rettilineo e uniforme in $\mathbb{R}^3$ nell'intervallo di tempo $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Se $v \in \mathbb{R}^3$ è il vettore velocità (costante), la legge oraria del moto del punto è descritta dal cammino

$$\begin{cases} \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \\ \alpha(t) = x^0 + (t - a)v \end{cases}$$

   ove $x^0 \in \mathbb{R}^3$ rappresenta la posizione del tempo nell'istante $t = a$. Supponiamo che sul punto agisca una certa forza costante F, che possiamo pensare come un certo elemento di R^3. Allora il lavoro svolto dalla forza sul punto nell'intervallo temporale $[a, b]$ è dato da $L = F \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)] = F \cdot [x^0 + (b - a)v - x^0] = (b - a)F \cdot v$.

   Supponiamo ora che la forza non sia più necessariamente costante, né che il punto si muova di moto rettilineo e uniforme. Supponiamo allora che la traiettoria del punto sia descritta da un certo cammino $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^3)$ e che la forza che si esercita punto per punto nello spazio sia schematizzabile con la funzione continua $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sia $\tau \in [a, b]$. Allora, per la formula di Taylor applicata componente per componente, $\alpha(t) = \alpha(\tau) + (t - \tau)\alpha^{'}(\tau) + o(t - \tau) \quad (t \to \tau)$.

   Trascurando allora il resto, possiamo osservare che, per piccoli valori di $\Delta\tau > 0$, nell'intervallo temporale $[\tau, \tau + \Delta\tau]$, si ha $a(t) \approx \alpha(\tau) + (t - \tau)\alpha^{'}(\tau)$, ovvero il moto è essenzialmente rettilineo e uniforme. Inoltre, se f è continua, ancora per $\Delta\tau$ "piccolo", si avrà $f(t) \approx f(\tau)$ se $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$.

   Allora, per definire il lavoro svolto dalla forza, possiamo decomporre l'intervallo $[a, b]$ in k parti uguali, ponendo $t_0 = a$, $t_1 = a + \frac{b-a}{k}$, ..., $t_j = a + \frac{j(b-a)}{k}$, ..., $t_k = b$. Indichiamo con L_j il lavoro svolto nell'intervallo temporale $[t_{j-1}, t_j]$ ($1 \leq j \leq k$). Sarà ragionevole supporre $L_j \approx (t_j - t_{j-1})f(t_{j-1}) \cdot \alpha^{'}(t_{j-1})$, e, sommando in j,

$$L = \sum_{j=1}^{k} L_j \approx \sum_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1})f(t_{j-1}) \cdot \alpha^{'}(t_{j-1})$$

   Ci si aspetta che l'approssimazione migliori aumentando il valore di k. Ora, nelle ipotesi fatte su α e f si può dimostrare che la somma al secondo membro dell'equazione sopra tende, per $k \to +\infty$, a

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha^{'}(t)\, dt = \int f \cdot d\alpha$$

   Si pone allora, per definizione,

$$L := \int f \cdot d\alpha$$

4. **Che cosa vuol dire che due cammini di classe C^1 sono equivalenti e positivamente equivalenti?**

   Siano $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ due cammini continui. Essi si dicono equivalenti se esiste $u : [c, d] \to [a, b]$, iniettiva e suriettiva, di classe C^1 con $u^{'}(s) \neq 0$ $\forall s \in [c, d]$, tale che $\beta(s) = \alpha(u(s))$ $\forall s \in [c, d]$.

   Diremo che α e β sono positivamente equivalenti se u è crescente.

5. **Come cambia l'integrale curvilineo di seconda specie se si passa a un cammino equivalente?**

   Siano $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ cammini C^1 a tratti equivalenti. Sia poi $f : \alpha([a, b]) = \beta([c, d]) \to \mathbb{R}^n$, tale che è definito $\int f \cdot d\alpha$. Allora è definito anche $\int f \cdot d\beta$ e, se u è la funzione che interviene nella definizione di cammini equivalenti,

$$\int f \cdot d\beta = \begin{cases} \int f \cdot d\alpha & \text{se}\, u \,\text{è crescente} \\ -\int f \cdot d\alpha & \text{se}\, u \,\text{è decrescente} \end{cases}$$

6. **Come si definisce la lunghezza di un cammino?**

   Sia $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un cammino continuo. Chiameremo lunghezza di α e indicheremo con la scrittura $l(\alpha)$

$$sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| : k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b \right\}$$

   Diremo che α è rettificabile se $l(\alpha) < +\infty$.

7. **Sotto quali condizioni tale lunghezza è riconducibile a un integrale?**

   Sia $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un cammino di classe C^1. Allora α è rettificabile e

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha^{'}(t)\| \, dt$$

8. **Come si definiscono gli integrali curvilinei di prima specie?**

   Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\alpha \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $f : \alpha([a, b]) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $t \to f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha^{'}(t)\|$ sia sommabile in $[a, b]$. Allora poniamo

$$\int_\alpha f(x) \, ds := \int_{[a,b]} f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha^{'}(t)\| \, dt$$

   Chiamiamo $\int_\alpha f(x) \, ds$ integrale curvilineo di prima specie di f sul cammino α.

9. **Come cambia l'integrale di prima specie se si passa a un cammino equivalente?**

   Siano $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ cammini C^1 a tratti equivalenti. Sia poi $f : \alpha([a, b]) = \beta([c, d]) \to \mathbb{R}$, tale che è definito $\int_\alpha f(x) \, ds$. Allora è definito anche $\int_\beta f(x) \, ds$ e $\int_\beta f(x) \, ds = \int_\alpha f(x) \, ds$.

10. **Sotto quale condizione si può dire che una funzione con il gradiente identicamente nullo è costante?**

    Sia A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(A)$ tale che $\nabla f(x) = O$ $\forall x \in A$. Allora f è costante in A.

11. **Che cos'è un campo vettoriale, che cosa si intende per potenziale di un campo vettoriale e quando si dice che un campo vettoriale è esatto?**

    Sia A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$. Un campo vettoriale in A è una funzione $F : A \to \mathbb{R}^n$ continua.

    Un potenziale del campo vettoriale F è una funzione $U \in C^1(A)$, tale che $\nabla U(x) = F(x)\ \forall x \in A$.

    Il campo vettoriale F si dice esatto se possiede dei potenziali.

12. **Che relazione c'è tra due potenziali dello stesso campo vettoriale?**

    Se U è un potenziale di F, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, la funzione di dominio A che associa $U(x) + c$ a x è ancora un potenziale di F. Inversamente, se V è un secondo potenziale di F, $\nabla(U - V)(x) = \nabla U(x) - \nabla V(x) = F(x) - F(x) = 0\ \forall x \in A$.

    Dato che una funzione con il gradiente identicamente nullo è costante (risposta 10), segue che $U - V$ è una funzione costante. Di conseguenza, dato che si considerano esclusivamente campi vettoriali definiti su aperti connessi per archi, due potenziali dello stesso campo vettoriale differiscono solo per una costante.

13. **Che cosa vuol dire che un campo vettoriale è conservativo?**

    Siano A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $F \in C(A; \mathbb{R}^n)$. Diremo che il campo vettoriale F è conservativo se, comunque si prendano due cammini α e β di classe C^1 a tratti, con sostegno in A e aventi lo stesso primo estremo e lo stesso secondo estremo, si ha $\int F \cdot d\alpha = \int F \cdot d\beta$.

14. **Che relazione c'è tra la nozione di campo vettoriale esatto e quella di campo vettoriale conservativo?**

    Siano A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $F \in C(A; \mathbb{R}^n)$. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:

    (a) F è esatto;

    (b) F è conservativo.

15. **Che cosa vuol dire che un campo vettoriale è chiuso e che relazione c'è tra la nozione di campo vettoriale esatto e quella di campo vettoriale chiuso?**

    Siano A un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$. Diremo che il campo vettoriale F è chiuso se $\forall i$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$.

    Sotto le stesse condizioni, se F è esatto, F è chiuso.

16. **Sotto quali condizioni si può dire che un campo vettoriale chiuso è esatto?**

    Siano A un aperto in $\mathbb{R}^n$, stellato rispetto a qualche suo punto x^0, $F \in C^1(A; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale chiuso. Allora F è esatto.

17. **Che cosa vuol dire che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è stellato rispetto a qualche suo punto?**

    Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$. Diremo che A è stellato rispetto a x^0 se, $\forall x \in A$, $[x^0, x] \subseteq A$.

18. **Che cosa sono i campi vettoriali centrali?**

    Sia $A = \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, $F : A \to \mathbb{R}^n$. Diremo che F è un campo centrale se esiste $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continua, tale che $F(x) = g(\|x\|^2)x\ \forall x \in A$.

6 Integrali di superficie, formule di Gauss-Green e di Stokes

1. **Dare la definizione di cammino regolare.**

   Siano $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un cammino continuo. Diremo che γ è:

   (a) semplice se le restrizioni di γ a $[a,b[$ e $]a,b]$ sono iniettive;

   (b) regolare se è di classe C^1, semplice e $\gamma^{'}(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$.

2. **Dare la definizione di aperto regolare in $\mathbb{R}^2$.**

   Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^2$. Diremo che Ω è regolare se:

   (a) è limitato e connesso per archi;

   (b) $Fr(\Omega)$ è unione di una famiglia finita di sostegni di cammini $\gamma^1, ..., \gamma^p$ regolari;

   (c) se $1 \leq k < l \leq p$, i sostegni γ^k e γ^l si intersecano al più negli estremi;

   (d) se $x \in Fr(\Omega)$, esiste $r > 0$ tale che, se $0 < \rho < r$, $B(x,\rho) \setminus Fr(\Omega)$ è unione di due aperti U_1 e U_2 connessi per archi, tali che $U_1 \subseteq \Omega$, $U_2 \cap \Omega = \emptyset$.

3. **Dare la definizione di versore normale esterno per aperto regolare in $\mathbb{R}^2$.**

   Siano Ω un aperto regolare in $\mathbb{R}^2$, $x \in Fr(\Omega)$, $x = \gamma^j(t)$ con $j \in \{1, ..., p\}$, $\gamma^j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}^2$, $t \in]a_j, b_j[$. Consideriamo i due versori ortogonali a γ^j in x. Allora si potrebbe dimostrare che uno e uno solo di essi, che indicheremo con il simbolo $v^j(x)$, gode della seguente proprietà: esiste $\tau > 0$ tale che, se $s \in [0, \tau[$, allora $x + sv^j(x) \notin \Omega$. Chiameremo $v^j(x)$ versore normale esterno a Ω in x.

4. **Enunciare le formule di Gauss-Green nel piano.**

   Sia Ω un aperto regolare in $\mathbb{R}^2$, con $Fr(\Omega)$ unione dei sostegni dei cammini regolari $\gamma^1, ..., \gamma^p$. Siano $v^1, ..., v^p$ i versori normali esterni a Ω rispettivamente su $\gamma^1, ..., \gamma^p$. Sia, infine, $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Allora, per $i \in \{1, 2\}$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx = \sum_{j=1}^{p} \int_{\gamma^j} f v_i^j \, ds$$

5. **Definire il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.**

   Siano $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Indichiamo con $\{e^1, e^2, e^3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Definiamo prodotto vettoriale tra x e y, e indichiamo col simbolo $x \wedge y$, il determinante (formale) della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ e^1 & e^2 & e^3 \end{pmatrix}$$

6. **Enunciarne le principali proprietà.**

   Siano $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ elementi di $\mathbb{R}^3$, a e b numeri reali. Allora:

   (a) $x \wedge y = -y \wedge x$;

   (b) $(ax + by) \wedge z = a(x \wedge z) + b(y \wedge z)$, $z \wedge (ax + by) = a(z \wedge x) + b(z \wedge y)$;

   (c) $x \wedge y = O$ se e solo se x e y sono linearmente dipendenti;

   (d) $x \wedge y \cdot x = x \wedge y \cdot y = 0$;

   (e) se $x \neq O$ e $y \neq O$, $\|x \wedge y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin(\theta)$ con

$$\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

7. **Qual è la definizione di superficie regolare con bordo, semplice, aperta?**

   Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Diremo che S è una superficie regolare con bordo semplice e aperta se esistono Ω aperto regolare in $\mathbb{R}^2$ e $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ tali che:

   (a) $\Phi(\overline{\Omega}) = S$;

   (b) $\Phi_{|\Omega}$ è iniettiva;

   (c) $\forall(\theta, \phi) \in \overline{\Omega}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi)$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi)$ sono linearmente indipendenti.

   Una coppia (Φ, Ω) con le proprietà sopra elencate si chiama parametrizzazione di S.

8. **Dare la definizione di area di una superficie regolare con bordo, semplice, aperta.**

   Siano S una superficie regolare con bordo semplice, aperta e (Φ, Ω) una sua parametrizzazione. Chiamiamo area di S il numero reale

$$\int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\| d\theta \, d\phi$$

   Questo integrale è indipendente dalla parametrizzazione (Φ, Ω).

9. **Dare la definizione di integrale di superficie.**

   Siano S una superficie regolare con bordo semplice aperta, $f : S \to \mathbb{R}$, (Φ, Ω) una parametrizzazione di S. Diremo che f è integrabile su S se la funzione $(\theta, \phi) \to f(\Phi(\theta, \phi)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\|$ è sommabile su $\overline{\Omega}$. In tal caso porremo, per definizione,

$$\int_S f(x) \, d\sigma := \int_{\Omega} f(\Phi(\theta, \phi)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \phi) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta, \phi) \right\| d\theta \, d\phi$$

   La definizione di funzione integrabile su S e il valore dell'integrale sopra non dipendono dalla parametrizzazione. Quest'ultimo integrale si chiama integrale di superficie di f su S.

10. **Dare la definizione di superficie regolare a tratti.**

    Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Diremo che S è una superficie regolare a tratti se:

    (a) S è connesso per archi;

    (b) esistono $S_1, ..., S_p$ con $p \in \mathbb{N}$ superfici regolari con bordo semplici, aperte, tali che

$$S = \bigcup_{i=1}^{p} S_i$$

    (c) se $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq p$, $S_{i_1} \cap S_{i_2} = \partial S_{i_1} \cap \partial S_{i_2}$.

11. **Estendere le definizioni di area e integrale di superficie alle superfici regolari a tratti.**

    Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie regolare a tratti. Definiremo area della superficie S la somma delle aree delle superfici regolari con bordo, semplici, aperte $S_1, ..., S_p$.

    Data $f : S \to \mathbb{R}$, diremo che f è integrabile su S se è integrabile su ciascuna delle superfici $S_1, ..., S_p$. In tal caso, porremo

$$\int_S f(x) \, d\sigma := \sum_{i=1}^{p} \int_{S_i} f(x) \, d\sigma$$

12. **Dare le definizioni di spazio tangente, piano tangente e spazio normale a una superficie regolare con bordo, semplice, aperta in un suo punto.**

    Siano S una superficie regolare con bordo semplice, aperta, $x^0 \in S \setminus \partial S$, (Φ, Ω) una parametrizzazione di S. Sia $x^0 = \Phi(\theta_0, \phi_0)$, con $(\theta_0, \phi_0) \in \Omega$.

    Chiamiamo spazio tangente a S in x^0, e indichiamo col simbolo $T_{x^0}(S)$, il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta_0, \phi_0)$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}(\theta_0, \phi_0)$. $T_{x^0}(S)$ è indipendente dalla parametrizzazione.

    Chiamiamo piano tangente a S in x^0 l'insieme $\{x^0 + v : v \in T_{x^0}(S)\}$.

    Chiamiamo spazio normale a S in x^0, e indichiamo col simbolo $N_{x^0}(S)$, il complemento ortogonale di $T_{x^0}(S)$, vale a dire, l'insieme degli elementi di $\mathbb{R}^3$ che sono normali a ogni elemento di $T_{x^0}(S)$.

13. **Dare la definizione di orientamento di una superficie regolare con bordo, semplice, aperta.**

    Sia S una superficie regolare con bordo semplice, aperta. Chiamiamo orientamento di S una funzione $v : S \to \mathbb{R}^3$ tale che:

    (a) $\forall x \in S \setminus \partial S$, $v(x) \in N_x(S)$;
    (b) $\forall x \in S$, $\|v(x)\| = 1$;
    (c) v è continua.

14. **Dare la definizione di aperto regolare in $\mathbb{R}^3$.**

    Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^3$. Diremo che Ω è regolare se:

    (a) è limitato e connesso per archi;
    (b) $Fr(\Omega)$ è unione di una famiglia finita di superfici regolari con bordo semplici, aperte $S_1, ..., S_p$;
    (c) se $1 \leq k < l \leq p$, $S_k \cap S_l = \partial S_k \cap \partial S_l$;
    (d) se $x \in Fr(\Omega)$, esiste $r > 0$ tale che, se $0 < \rho < r$, $B(x, \rho) \setminus Fr(\Omega)$ è unione di due aperti U_1 e U_2 connessi per archi, tali che $U_1 \subseteq \Omega$, $U_2 \cap \Omega = \emptyset$.

15. **Dare la definizione di versore normale esterno per aperto regolare in $\mathbb{R}^3$.**

    Siano Ω un aperto regolare in $\mathbb{R}^3$, $S_1, ..., S_p$ superfici regolari con bordo semplici, aperte. Allora, per ciascun $j = 1, ..., p$, esiste unico un orientamento v^j su S_j tale che, per ogni $x \in S_j \setminus \partial S_j$, esiste $\tau \in \mathbb{R}^+$ per cui si ha che, se $s \in [0, \tau[$, $x + sv^j(x) \notin \Omega$. Chiameremo questo orientamento v^j versore normale esterno a Ω in x.

16. **Enunciare le formule di Gauss-Green in $\mathbb{R}^3$.**

    Sia Ω un aperto regolare in $\mathbb{R}^3$, con $Fr(\Omega)$ unione delle superfici regolari con bordo semplici, aperte $S_1, ..., S_p$. Siano $v^1, ..., v^p$ i versori normali esterni a Ω rispettivamente su $S_1, ..., S_p$. Sia, infine, $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Allora, per $i \in \{1, 2, 3\}$,

    $$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx = \sum_{j=1}^{p} \int_{S_j} f v_i^j \, d\sigma$$

17. **Enunciare la formula di Stokes.**

    Siano U un aperto connesso per archi in $\mathbb{R}^3$, (S, v) una superficie orientata con $S \subseteq U$, F un campo vettoriale in U di classe C^1. Sia poi (Φ, Ω) una parametrizzazione di S compatibile con l'orientamento v. Siano, infine, $\gamma^1, ..., \gamma^p$ cammini regolari in $\mathbb{R}^2$ che orientano positivamente $Fr(\Omega)$. Per $j = 1, ..., p$, consideriamo i cammini regolari $\eta^j := \Phi \circ \gamma^j$. Allora

    $$\int_S rot(F)(x) \cdot v(x)\, d\sigma = \sum_{j=1}^{p} \int F \cdot d\eta^j$$