Analisi Matematica T-2 - Ingegneria Informatica (0954)
Corso tenuto da Davide Guidetti

Esercizi svolti per l'esame scritto

Versione 1.1.1 del 04/06/2023

Appunti di Andrei Daniel Ivan per l'anno accademico 2022/2023

Indice

Note

Questo file è stato realizzato per aiutare nella preparazione dell'esame scritto di Analisi Matematica T-2.

Nella versione attuale del file, la 1.1.1 del 04/06/2023, mancano (degli argomenti trattati nell'anno accademico 2022-2023) del capitolo sulle equazioni differenziali la guida su come svolgerle e gli esercizi sulle equazioni differenziali lineari. Inoltre manca il capitolo 5 (integrali curvilinei e campi vettoriali): li aggiungerò (ma non ne sono sicuro al 100%, dipende dai tempi) in futuro.

Sempre nell'anno accademico 2022-2023 non sono stati invece trattati gli esercizi sui punti critici di una funzione (l'attuale capitolo 2 di questo file) e gli esercizi sul determinare l'immagine di una funzione, da svolgere con i moltiplicatori di Lagrange (l'attuale capitolo 3 di questo file). Purtroppo avevo iniziato a scrivere questo documento prima di sapere che non sarebbero stati trattati e avevo già scritto quegli esercizi (che ho deciso di lasciare in caso vengano trattati negli anni futuri).

Aggiornamenti dalla versione 1.1 alla 1.1.1

- Corretto l'esame del 22/07/2022 del capitolo **Equazioni differenziali**.

Aggiornamenti dalla versione 1.0 alla 1.1

- Aggiunto nel capitolo **Derivate, chain rule e sviluppi**:
  - l'esame del 10/01/2018;
  - l'esame del 20/06/2022.
- Aggiunto il capitolo **Equazioni differenziali** con:
  - l'esame del 10/01/2022 (non lineare del primo ordine a variabili separabili);
  - l'esame del 24/01/2022 (non lineare del secondo ordine del tipo $x''(t) = f(t, x'(t))$);
  - l'esame del 07/02/2022 (non lineare del terzo ordine del tipo $x'''(t) = f(t, x''(t))$);
  - l'esame del 20/06/2022 (non lineare del primo ordine di Bernoulli);
  - l'esame del 22/07/2022 (non lineare del primo ordine del tipo $x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right)$);
  - l'esame del 01/09/2022 (non lineare del secondo ordine del tipo $x''(t) = f(t, x(t))$);
  - l'esame del 09/01/2023 (non lineare del primo ordine del tipo $x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right)$);
  - l'esame del 30/01/2023 (non lineare del primo ordine di Bernoulli);
  - l'esame del 13/02/2023 (non lineare del secondo ordine del tipo $x''(t) = f(t, x(t))$).

1 Derivate, chain rule e sviluppi

1.1 How to

Per svolgere questi esercizi di solito è richiesto l'utilizzo della chain rule.

Teorema di derivazione composta ("chain rule")
Siano m, n naturali, A aperto in $\mathbb{R}^n$, B aperto in $\mathbb{R}^m$, $g \in C^1(A)$, $f \in C^1(B; \mathbb{R}^n)$, tale che $f(B) \subseteq A$. Allora:

1. $g \circ f \in C^1(B)$;
2. $\forall x \in B$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, si ha

$$D_i(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot D_i f(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j g(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Nel caso in cui la funzione composta f sia in una sola variabile, ovvero si ha $f(x) = g(h(x))$, si calcolano le derivate utilizzando le chain rule, ovvero

$$f'(x) = \nabla g(h(x)) \cdot h'(x)$$

Se è necessario calcolare $f''(x)$, si prosegue allo stesso modo (nota: molto spesso è anche necessario utilizzare la formula della derivata del prodotto dato che in $f'(x)$ si eseguono dei prodotti).

Se invece la funzione composta f è in due variabili, ovvero si ha $f(x_1, x_2) = g(h(x))$, è necessario calcolare tutte le derivate di f, ovvero il suo gradiente $\nabla f(x_1, x_2)$.
Occorre calcolare, sempre utilizzando la chain rule,

$$D_1 f(x_1, x_2) = \nabla g(h(x)) \cdot D_1 h(x)$$

$$D_2 f(x_1, x_2) = \nabla g(h(x)) \cdot D_2 h(x)$$

Sviluppo di Taylor
In alcuni esercizi è richiesto il calcolo dello sviluppo di Taylor fino a un certo ordine. La formula, fino al secondo ordine, è

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + o(x^2)$$

Dato che servono $f'(x)$ e $f''(x)$, spesso occorre utilizzare la chain rule dato che f sarà una funzione composta.

1.2 Esercitazione 3.5

Siano $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = g(ln(x_1) + x_2, x_1 x_2)$. Allora $\nabla f(1, 0)$ coincide con:

1. $(D_1 g(0, 0), D_1 g(0, 0) + D_2 g(0, 0))$;
2. $(D_1 g(0, 0), D_1 g(0, 0) - D_2 g(0, 0))$;
3. $(D_1 g(0, 0) + D_2 g(0, 0), D_1 g(0, 0) - D_2 g(0, 0))$;
4. $(D_1 g(0, 0) + D_2 g(0, 0), D_1 g(0, 0) + D_2 g(0, 0))$.

f è una funzione composta con $f = g \circ h$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x_1, x_2) = (ln(x_1) + x_2, x_1 x_2)$.
Dato che $\nabla f(1, 0) = [D_1 f(1, 0), D_2 f(1, 0)]$, occorre inizialmente calcolare $D_1 f(x_1, x_2)$ e $D_2 f(x_1, x_2)$ e poi sostituire $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$.

$$D_1 f(x_1, x_2) = \nabla g\,(h(x_1, x_2)) \cdot D_1 h(x_1, x_2) = [D_1 g(h(x_1, x_2)), D_2 g(h(x_1, x_2))] \cdot \left(\frac{1}{x_1}, x_2\right) =$$
$$= D_1 g(h(x_1, x_2)) \cdot \frac{1}{x_1} + D_2 g(h(x_1, x_2)) \cdot x_2$$
$$D_2 f(x_1, x_2) = \nabla g\,(h(x_1, x_2)) \cdot D_2 h(x_1, x_2) = [D_1 g(h(x_1, x_2)), D_2 g(h(x_1, x_2))] \cdot (1, x_1) =$$
$$= D_1 g(h(x_1, x_2)) + D_2 g(h(x_1, x_2)) \cdot x_1$$

A questo punto si può sostituire $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$. Sapendo che $h(1, 0) = (ln(1) + 0, 1 \cdot 0) = (0, 0)$, si possono calcolare $D_1 f(1, 0)$ e $D_2 f(1, 0)$:

$$D_1 f(1, 0) = D_1 g(0, 0) \cdot \frac{1}{1} + D_2 g(0, 0) \cdot 0 = D_1 g(0, 0)$$

$$D_2 f(1, 0) = D_1 g(0, 0) + D_2 g(0, 0) \cdot 1 = D_1 g(0, 0) + D_2 g(0, 0)$$

Adesso si può ricavare $\nabla f(1, 0)$:

$$\nabla f(1, 0) = [D_1 f(1, 0), D_2 f(1, 0)] = [D_1 g(0, 0), D_1 g(0, 0) + D_2 g(0, 0)]$$

1.3 Esercitazione 5.2

Siano $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(\sin(x), \cos(x))$. Allora

1. $f(x) = g(0,1) + D_1g(0,1)x + \frac{1}{2}\left[D_{11}g(0,1) - D_2g(0,1)\right]x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$;
2. $f(x) = g(0,1) + D_1g(0,1)x + D_{11}g(0,1)x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$;
3. $f(x) = g(0,1) + D_2g(0,1)x + \left[D_{11}g(0,1) - D_{12}g(0,1)\right]x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$;
4. $f(x) = g(0,1) + [D_1g(0,1) + D_2g(0,1)]x + \left[D_{11}g(0,1) - D_{12}g(0,1)\right]x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$.

f è una funzione composta con $f = g \circ h$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (\sin(x), \cos(x))$.
È richiesto il calcolo dello sviluppo di Taylor fino al secondo ordine, che è dato da:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + o(x^2)$$

Occorre quindi ricavare $f'(x)$ e $f''(x)$ per poi sostituire in ciascuno, dato che è richiesto lo sviluppo per $x \to 0$, $x = 0$.

$$f'(x) = \nabla g(h(x)) \cdot h'(x) = [D_1g(h(x)), D_2g(h(x))] \cdot [\cos(x), -\sin(x)] =$$
$$= D_1g(h(x)) \cdot \cos(x) - D_2g(h(x)) \cdot \sin(x)$$

$$f''(x) = \nabla D_1g(h(x)) \cdot h'(x) \cdot \cos(x) - D_1g(h(x)) \cdot \sin(x) -$$
$$-\nabla D_2g(h(x)) \cdot h'(x) \cdot \sin(x) - D_2g(h(x)) \cdot \cos(x) =$$
$$= [D_{11}g(h(x)), D_{12}g(h(x))] \cdot [\cos(x), -\sin(x)] \cdot \cos(x) - D_1g(h(x)) \cdot \sin(x) -$$
$$-[D_{21}g(h(x)), D_{22}g(h(x))] \cdot [\cos(x), -\sin(x)] \cdot \sin(x) - D_2g(h(x)) \cdot \cos(x) =$$
$$= D_{11}g(h(x)) \cdot \cos^2(x) - D_{12}g(h(x)) \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - D_1g(h(x)) \cdot \sin(x) -$$
$$-D_{21}g(h(x)) \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) - D_{22}g(h(x)) \cdot \sin^2(x) - D_2g(h(x)) \cdot \cos(x)$$

A questo punto si può sostituire $x = 0$. Sapendo che $h(0) = (\sin(0), \cos(0)) = (0, 1)$, si possono calcolare $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$:

$$f(0) = g(0,1)$$

$$f'(0) = D_1g(0,1) \cdot \cos(0) - D_2g(0,0) \cdot \sin(0) = D_1g(0,1)$$

$$f''(0) = D_{11}g(0,1) \cdot \cos^2(0) - D_{12}g(0,1) \cdot \sin(0) \cdot \cos(0) - D_1g(0,1) \cdot \sin(0) -$$
$$-D_{21}g(0,1) \cdot \cos(0) \cdot \sin(0) - D_{22}g(0,1) \cdot \sin^2(0) - D_2g(0,1) \cdot \cos(0) =$$
$$= D_{11}g(0,1) - D_2g(0,1)$$

Ne segue che:

$$f(x) = g(0,1) + D_1g(0,1)x + \frac{1}{2}\left[D_{11}g(0,1) - D_2g(0,1)\right]x^2 + o(x^2) \ (x \to 0)$$

1.4 Esercitazione 5.4

Siano $g \in C^2(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = g(x_1 - x_2)$. Allora

1. $D_1^2 f(x_1, x_2) D_2^2 f(x_1, x_2) = 0 \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
2. $D_1^2 f(x_1, x_2) + D_2^2 f(x_1, x_2) = 0 \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
3. $D_1^2 f(x_1, x_2) - D_2^2 f(x_1, x_2) = 0 \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;
4. $D_1^2 f(x_1, x_2) - D_2 f(x_1, x_2) = 0 \ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$;

f è una funzione composta con $f = g \circ h$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)$.
Per svolgere l'esercizio è richiesto il calcolo delle derivate seconde di f.

Si calcola $D_1 f(x_1, x_2)$ e poi $D_1^2 f(x_1, x_2)$:

$$D_1 f(x_1, x_2) = \nabla g(h(x_1, x_2)) \cdot D_1 h(x_1, x_2) = \nabla g(h(x_1, x_2)) \cdot 1 = \\ = D_1 g(h(x_1, x_2)) + D_2 g(h(x_1, x_2))$$

$$D_1^2 f(x_1, x_2) = \nabla(D_1 g(h(x_1, x_2))) \cdot D_1 h(x_1, x_2) + \nabla(D_2 g(h(x_1, x_2))) \cdot D_1 h(x_1, x_2) = \\ = \nabla(D_1 g(h(x_1, x_2))) \cdot 1 + \nabla(D_2 g(h(x_1, x_2))) \cdot 1 = \nabla(D_1 g(h(x_1, x_2))) + \nabla(D_2 g(h(x_1, x_2)))$$

In modo analogo si calcola $D_2 f(x_1, x_2)$ e poi $D_2^2 f(x_1, x_2)$:

$$D_2 f(x_1, x_2) = \nabla g(h(x_1, x_2)) \cdot D_2 h(x_1, x_2) = \nabla g(h(x_1, x_2)) \cdot (-1) = \\ = -D_1 g(h(x_1, x_2)) - D_2 g(h(x_1, x_2))$$

$$D_2^2 f(x_1, x_2) = \nabla(-D_1 g(h(x_1, x_2))) \cdot D_2 h(x_1, x_2) + \nabla(-D_2 g(h(x_1, x_2))) \cdot D_2 h(x_1, x_2) = \\ = -\nabla(D_1 g(h(x_1, x_2))) \cdot (-1) - \nabla(D_2 g(h(x_1, x_2))) \cdot (-1) = \nabla(D_1 g(h(x_1, x_2))) + \nabla(D_2 g(h(x_1, x_2)))$$

Si nota che $D_1^2 f(x_1, x_2) = D_2^2 f(x_1, x_2)$ da cui segue immediatamente che $D_1^2 f(x_1, x_2) - D_2^2 f(x_1, x_2) = 0$.

1.5 Esame del 10/01/2018

Siano $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = x_1^{3f(x_2)}$. Allora $D_{12}f(1,1) =$

1. $3f'(1) + f''(1)$;
2. $3f'(1)$;
3. $-6f'(1)$;
4. nessuna delle precedenti.

Nota: nel testo dell'esercizio c'è probabilmente un errore. La funzione $f(x_2)$ ha solo la variabile x_2 e quindi calcolando la sua derivata parziale rispetto a x_1 verrebbe 0; calcolando poi la derivata parziale rispetto a x_2 si avrebbe sempre 0. Inoltre, viene poi chiesto di sostituire $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ all'interno di f ma, come detto prima, f dipende solo da x_2. Se il testo dell'esercizio fosse corretto, allora la risposta giusta sarebbe "nessuna delle precedenti".
Probabilmente quindi il testo dell'esercizio è errato e si richiedeva in realtà di calcolare $D_{12}g(1,1)$, come fatto di seguito.

È necessario calcolare $D_1g(x_1, x_2)$, ovvero la derivata di g rispetto a x_1 e poi da questa calcolare $D_{12}g(x_1, x_2)$, ovvero la derivata di $D_1g(x_1, x_2)$ rispetto a x_2.

Per calcolare $D_1g(x_1, x_2)$ si utilizza la regola di derivazione $f(x) = x^n \to f'(x) = n \cdot x^{n-1}$:

$$D_1g(x_1, x_2) = 3f(x_2) \cdot x_1^{3f(x_2)-1}$$

Per calcolare $D_{12}g(x_1, x_2)$ si utilizza la derivata del prodotto e la regola di derivazione $f(x) = a^x \to f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$:

$$D_{12}g(x_1, x_2) = 3f'(x_2) \cdot x_1^{3f(x_2)-1} + 3f(x_2) \cdot x_1^{3f(x_2)-1} \cdot \ln(x_1)$$

Non è necessario proseguire con i calcoli in quanto è richiesto il calcolo di $D_{12}g(1,1)$ e dato che $\ln(1) = 0$, conviene sostituire subito:

$$\begin{aligned} D_{12}g(1,1) &= 3f'(1) \cdot 1^{3f(1)-1} + 3f(1) \cdot 1^{3f(1)-1} \cdot \ln(1) = \\ &= 3f'(1) \cdot 1^{3f(1)-1} = 3f'(1) \cdot 1 = 3f'(1) \end{aligned}$$

1.6 Esame del 03/09/2018

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(2x, \cos(x))$. Allora $g''(0) =$

1. $4D_{11}f(0,1) - D_2f(0,1)$;
2. $2D_{11}f(0,1) - D_2f(0,1)$;
3. $2D_{11}f(0,1) + D_2f(0,1)$;
4. nessuna delle precedenti.

g è una funzione composta con $g = f \circ h$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (2x, \cos(x))$.
Per poter calcolare $g''(0)$ è necessario calcolare $g'(x)$, $g''(x)$ e poi sostituire $x = 0$.

$$g'(x) = \nabla f(h(x)) \cdot h'(x) = [D_1f(h(x)), D_2f(h(x))] \cdot (2, -\sin(x)) = 2D_1f(h(x)) - D_2f(h(x)) \cdot \sin(x)$$

$$g''(x) = \nabla(2D_1f(h(x))) \cdot h'(x) - \nabla(D_2f(h(x))) \cdot h'(x) \cdot \sin(x) - D_2f(h(x)) \cdot \cos(x)$$

Si può notare che sono presenti seni e coseni in $g''(x)$. È conveniente, prima di continuare, sostituire subito $x = 0$ per semplificare i calcoli. In particolare $h(0) = (2 \cdot 0, \cos(0)) = (0, 1)$ mentre, dato che $h'(x) = (2, -\sin(x))$, $h'(0) = (2, -\sin(0)) = (2, 0)$.

$$\begin{gathered} g''(0) = \nabla(2D_1f(0,1)) \cdot (2,0) - \nabla(D_2f(0,1)) \cdot (2,0) \cdot \sin(0) - D_2f(0,1) \cdot \cos(0) = \\ = 2\nabla(D_1f(0,1)) \cdot (2,0) - D_2f(0,1) = 2 \cdot [D_{11}f(0,1), D_{12}f(0,1)] \cdot (2,0) - D_2f(0,1) = \\ = 4D_{11}f(0,1) - D_2f(0,1) \end{gathered}$$

1.7 Esame del 08/01/2019

Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(3^x, x)$. Allora

1. $g(x) = f(1,0) + [D_1 f(1,0) + D_2 f(1,0)]x + o(x)$ $(x \to 0)$;
2. $g(x) = f(1,0) + [D_1 f(1,0) \ln(6) + D_2 f(1,0)]x + o(x)$ $(x \to 0)$;
3. $g(x) = f(1,0) + [D_1 f(1,0) \ln(3) + D_2 f(1,0)]x + o(x)$ $(x \to 0)$;
4. nessuna delle precedenti.

g è una funzione composta con $g = f \circ h$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (3^x, x)$.
È richiesto il calcolo dello sviluppo di Taylor fino al primo ordine, che è dato da:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{1} \frac{g^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = g(x_0) + g'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x)$$

Occorre quindi ricavare $g'(x)$ per poi sostituire, dato che è richiesto lo sviluppo per $x \to 0$, $x = 0$.

$$g'(x) = \nabla f(h(x)) \cdot h'(x) = [D_1 f(h(x)), D_2 f(h(x))] \cdot (3^x \ln(3), 1) = D_1 f(h(x)) \cdot 3^x \ln(3) + D_2 f(h(x))$$

Si può ora sostituire $x = 0$ in $g(x)$ e in $g'(x)$.

$$g(0) = f(3^0, 0) = f(1,0)$$

$$g'(0) = D_1 f(1,0) \cdot 3^0 \ln(3) + D_2 f(1,0) = D_1 f(1,0) \cdot \ln(3) + D_2 f(1,0)$$

Si ricava infine lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $x \to 0$.

$$g(x) = f(1,0) + [D_1 f(1,0) \ln(3) + D_2 f(1,0)]x + o(x) \ (x \to 0)$$

1.8 Esame del 20/06/2022

Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x_1, x_2) > 0\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(2t, 3t)^{t^2}$. Calcolare $g'(0)$.

g è una funzione composta con $g = f \circ h$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(t) = (2t, 3t)$.
Per poter calcolare $g'(0)$ è necessario calcolare $g'(t)$ e poi sostituire $t = 0$.

Si può riscrivere $g(t)$ come $e^{\ln(g(t))}$. In questo modo si ha:

$$g(t) = e^{\ln\left(f(2t,3t)^{t^2}\right)} = e^{t^2 \cdot \ln(f(2t,3t))}$$

$$g'(t) = e^{t^2 \cdot \ln(f(2t,3t))} \cdot \frac{d}{dt}\left[t^2 \cdot \ln(f(2t,3t))\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[t^2 \cdot \ln(f(2t,3t))\right] &= 2t \cdot \ln(f(2t,3t)) + t^2 \cdot \frac{\nabla f(h(t)) \cdot h'(t)}{f(2t,3t)} = \\
&= 2t \cdot \ln(f(2t,3t)) + t^2 \cdot \frac{\nabla f(h(t)) \cdot h'(t)}{f(2t,3t)} = \\
&= 2t \cdot \ln(f(2t,3t)) + t^2 \cdot \frac{[D_1 f(h(t)), D_2 f(h(t))] \cdot [2,3]}{f(2t,3t)} = \\
&= 2t \cdot \ln(f(2t,3t)) + t^2 \cdot \frac{2D_1 f(h(t)) + 3D_2 f(h(t))}{f(2t,3t)}
\end{aligned}$$

Nota: non era necessario proseguire con i calcoli. Infatti, appena è stato calcolato $\frac{d}{dt}\left[t^2 \cdot \ln(f(2t,3t))\right]$ usando la derivata del prodotto, è apparso nella prima parte $2t$ e nella seconda parte t^2.
È quindi evidente che sostituire $t = 0$ dia $g'(0) = 0$:

$$g'(0) = 0 \cdot \ln(f(2t,3t)) + 0 \cdot \frac{2D_1 f(h(t)) + 3D_2 f(h(t))}{f(2t,3t)} = 0$$

1.9 Esame del 01/09/2022

Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $g(t) = f\left(t, \int_0^t e^{2s^2}\, ds\right)$. Calcolare $g''(0)$.

g è una funzione composta con $g = f \circ h$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(t) = \left(t, \int_0^t e^{2s^2}\, ds\right)$.
Per calcolare $h'(t)$ dell'integrale si utilizza il teorema fondamentale del calcolo integrale, con cui si ottiene $h'(t) = \left(1, e^{2t^2}\right)$.
Per poter calcolare $g''(0)$ è necessario calcolare $g'(t)$, $g''(t)$ e poi sostituire $t = 0$.

$$g'(t) = \nabla f(h(t)) \cdot h'(t) = [D_1 f(h(t)), D_2 f(h(t))] \cdot \left(1, e^{2t^2}\right) = D_1 f(h(t)) + D_2 f(h(t)) \cdot e^{2t^2}$$

$$\begin{aligned} g''(t) = \nabla(D_1 f(h(t))) \cdot h'(t) + \nabla(D_2 f(h(t))) \cdot \left(1, e^{2t^2}\right) \cdot e^{2t^2} + D_2 f(h(t)) \cdot 4te^{2t^2} = \\ = D_{11} f(h(t)) + D_{12} f(h(t)) \cdot e^{2t^2} + \left[D_{21} f(h(t)) + D_{22} f(h(t)) \cdot e^{2t^2}\right] \cdot e^{2t^2} + D_2 f(h(t)) \cdot 4te^{2t^2} \end{aligned}$$

A questo punto si può sostituire $t = 0$. Il termine e^{2t^2} per $t = 0$ è uguale a 1 mentre $h(0) = (0, 0)$. Di conseguenza:

$$g''(0) = D_{11} f(0, 0) + D_{12} f(0, 0) + D_{21} f(0, 0) + D_{22} f(0, 0)$$

1.10 Esame del 30/01/2023

Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\cos(t), \sin(4t))$. Calcolare $g''(0)$.

g è una funzione composta con $g = f \circ h$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $h(t) = (\cos(t), \sin(4t))$.
Per poter calcolare $g''(0)$ è necessario calcolare $g'(t)$, $g''(t)$ e poi sostituire $t = 0$.

$$g'(t) = \nabla f(h(t)) \cdot h'(t) = [D_1 f(h(t)), D_2 f(h(t))] \cdot (-\sin(t), 4\cos(4t)) =$$
$$= -D_1 f(h(t)) \sin(t) + 4 D_2 f(h(t)) \cos(4t)$$

$$g''(t) = -\nabla(D_1 f(h(t))) \cdot (-\sin(t), 4\cos(4t)) \cdot \sin(t) - D_1 f(h(t)) \cdot \cos(t) +$$
$$+ 4\nabla(D_2 f(h(t))) \cdot (-\sin(t), 4\cos(4t)) \cdot \cos(4t) - 16 D_2 f(h(t)) \cdot \sin(4t)$$

Si può notare che sono presenti seni e coseni in $g''(t)$. È conveniente, al posto di proseguire con i calcoli, sostituire subito $t = 0$ per semplificare i calcoli dato che $\cos(0) = 1$ e $\sin(0) = 0$.
Data $h(t)$, si ha $h(0) = (1, 0)$. Ne segue che:

$$g''(0) = -\nabla(D_1 f(1,0)) \cdot (0,4) \cdot \sin(0) - D_1 f(1,0) + 4\nabla(D_2 f(1,0)) \cdot (0,4) - 16 D_2 f(1,0) \cdot \sin(0) =$$
$$= -D_1 f(1,0) + 4\nabla(D_2 f(1,0)) \cdot (0,4) =$$
$$= -D_1 f(1,0) + 4 \cdot [D_{21} f(1,0), D_{22} f(1,0)] \cdot (0,4) =$$
$$= -D_1 f(1,0) + 16 D_{22} f(1,0)$$

2 Punti critici di una funzione

2.1 How to

Per determinare i punti critici di una funzione f in n variabili occorre:

1. calcolare il gradiente della funzione f, definito come $\nabla f(x) := [D_1 f(x), ..., D_n f(x)]$ (il vettore delle derivate parziali di f);

2. porre $\nabla f(x) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} D_1 f(x) = 0 \\ ... \\ D_n f(x) = 0 \end{cases}$$

   e risolvere il sistema. I punti trovati sono i punti critici di f;

3. calcolare le derivate seconde di f, ovvero derivare il gradiente ∇f rispetto alle n variabili.

   In particolare, nel caso di due variabili si deriva $D_1 f(x)$ rispetto alla prima variabile ottenendo $D_{11} f(x)$ e rispetto alla seconda variabile ottenendo $D_{12} f(x)$. Si deriva poi $D_2 f(x)$ rispetto alla prima variabile ottenendo $D_{21} f(x)$ e rispetto alla seconda variabile ottenendo $D_{22} f(x)$.

   Nel caso di tre variabili si procede in modo analogo ricavando le 9 derivate seconde;

4. calcolare la forma quadratica

$$Q(h_1, ..., h_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} f(x) h_i h_j$$

   Nel caso di due variabili varrà

$$Q(h_1, h_2) = \frac{1}{2} \cdot [D_{11} f(x) \cdot h_1 h_1 + D_{12} f(x) \cdot h_1 h_2 + D_{21} f(x) \cdot h_2 h_1 + D_{22} f(x) \cdot h_2 h_2]$$

   Nel caso di tre variabili si procede in modo analogo ricavando i 9 termini;

5. sostituire, per ciascun punto critico trovato precedentemente, le sue coordinate in Q (al posto di $x_1, ..., x_n$) e calcolare la forma quadratica in quel punto, che sarà ora una funzione dipendente da $h_1, ..., h_n$.

   Si ha che:

   (a) Q è **semidefinita positiva** se $Q(h) \geq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$;
   (b) Q è **semidefinita negativa** se $Q(h) \leq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$;
   (c) Q è **definita positiva** se $Q(h) > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$;
   (d) Q è **definita negativa** se $Q(h) < 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$;
   (e) se non si rientra nei casi precedenti, Q non è semidefinita.

6. In base alla forma quadratica ottenuta per ciascun punto critico, si può dire che:

   (a) se la forma quadratica Q è definita positiva, il punto critico è un punto di minimo relativo per f;
   (b) se la forma quadratica Q è definita negativa, il punto critico è un punto di massimo relativo per f;
   (c) se la forma quadratica Q non è semidefinita, il punto critico è un punto di sella per f (ovvero non è un estremante relativo);
   (d) se la forma quadratica è semidefinita negativa o semidefinita positiva, non si può dire nulla riguardo al punto critico.

2.2 Esercizio 2.5.3 (VII)

Determinare e studiare i punti critici della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1x_2(x_1 - 1)$.

Si inizia cercando i punti critici di f, ovvero i punti che annullano il gradiente. Occorre quindi calcolare il gradiente e porlo uguale a 0. Per comodità si riscrive la funzione f come $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2 - x_1x_2$.

$$\nabla f(x_1, x_2) = [2x_1x_2 - x_2, x_1^2 - x_1] = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1x_2 - x_2 = 0 \\ x_1^2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$; di conseguenza per entrambi i valori si ha $x_2 = 0$.
I punti critici trovati sono quindi $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

A questo punto si calcolano le derivate seconde per poi determinare la forma quadratica.

$$D_{11}f(x_1, x_2) = 2x_2$$
$$D_{12}f(x_1, x_2) = D_{21}f(x_1, x_2) = 2x_1 - 1$$
$$D_{22}f(x_1, x_2) = 0$$

$$\begin{aligned} Q(h_1, h_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} D_{ij}f(x_1, x_2)h_ih_j &= \frac{1}{2}[(2x_2)h_1h_1 + (2x_1 - 1)h_1h_2 + (2x_1 - 1)h_2h_1] = \\ &= \frac{1}{2}[2x_2h_1^2 + 2 \cdot (2x_1 - 1)h_1h_2] = x_2h_1^2 + (2x_1 - 1)h_1h_2 \end{aligned}$$

Nel punto $(0, 0)$ si ha $Q(h_1, h_2) = -h_1h_2$ mentre nel punto $(1, 0)$ si ha $Q(h_1, h_2) = h_1h_2$. In entrambi i casi a seconda di come si prendono h_1 e h_2 (entrambi positivi, uno positivo e uno negativo o entrambi negativi) si può ottenere $Q < 0$, $Q = 0$ o $Q > 0$. In entrambi i punti quindi Q non è semidefinita. Segue che $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ sono punti di sella.

2.3 Esercizio 2.5.3 (VIII)

Determinare e studiare i punti critici della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$.

Si inizia cercando i punti critici di f, ovvero i punti che annullano il gradiente. Occorre quindi calcolare il gradiente e porlo uguale a 0.

$$\nabla f(x_1, x_2) = [3x_1^2 + 1 - 4x_2, -4x_1 - 4x_2] = 0$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trovano facilmente i punti critici $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $(-1, 1)$.

A questo punto si calcolano le derivate seconde per poi determinare la forma quadratica.

$$D_{11}f(x_1, x_2) = 6x_1$$
$$D_{12}f(x_1, x_2) = D_{21}f(x_1, x_2) = -4$$
$$D_{22}f(x_1, x_2) = -4$$

$$Q(h_1, h_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} D_{ij}f(x_1, x_2)h_ih_j = \frac{1}{2}[(6x_1)h_1h_1 - 4h_1h_2 - 4h_2h_1 - 4h_2h_2] =$$
$$= \frac{1}{2}[6x_1h_1^2 - 8h_1h_2 - 4h_2^2] = 3x_1h_1^2 - 4h_1h_2 - 2h_2^2$$

Nel punto $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ si ha $Q(h_1, h_2) = -h_1^2 - 4h_1h_2 - 2h_2^2$. Se si suppone $h_1 = 0$ o $h_2 = 0$, Q è definita negativa in quanto escludendo il caso in cui $h_1 = h_2 = 0$ si ha sempre $Q < 0$. Tuttavia, se si suppone $h_1 = -1$ e $h_2 = 1$ si ottiene $Q = 1 > 0$ e di conseguenza Q non è semidefinita. Ne segue che $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di sella.
Nel punto $(-1, 1)$ si ha $Q(h_1, h_2) = -3h_1^2 - 4h_1h_2 - 2h_2^2$. In questo caso si ha sempre $Q < 0$ tranne per $h_1 = h_2 = 0$, ovvero Q è definita negativa.
Lo si può facilmente notare considerando che i termini $-3h_1^2$ e $-2h_2^2$ sono sempre negativi e di conseguenza si potrebbe avere $Q > 0$ solo se $-4h_1h_2 > 3h_1^2 + 2h_2^2$ ma è facile verificare che questa condizione non è mai vera. Ne segue che $(-1, 1)$ è un punto di massimo relativo.

2.4 Esercizio 2.5.4 (III)

Determinare e studiare i punti critici della seguente funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3 - x_1x_2 - x_1x_3$.

Si inizia cercando i punti critici di f, ovvero i punti che annullano il gradiente. Occorre quindi calcolare il gradiente e porlo uguale a 0.

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = [4x_1 - x_2 - x_3, 2x_2 - x_1, 2 - x_1] = 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_1 = 0 \\ 2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

Si ricava immediatamente il punto critico $(2, 1, 7)$.

A questo punto si calcolano le derivate seconde per poi determinare la forma quadratica.

$$\begin{gathered} D_{11}f(x_1, x_2, x_3) = 4 \\ D_{12}f(x_1, x_2, x_3) = D_{21}f(x_1, x_2, x_3) = -1 \\ D_{13}f(x_1, x_2, x_3) = D_{31}f(x_1, x_2, x_3) = -1 \\ D_{22}f(x_1, x_2, x_3) = 2 \\ D_{23}f(x_1, x_2, x_3) = D_{32}f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ D_{33}f(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} Q(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D_{ij}f(x_1, x_2, x_3)h_ih_j = \frac{1}{2}[4h_1h_1 - h_1h_2 - h_1h_3 - h_2h_1 + 2h_2h_2 - h_3h_1] = \\ = \frac{1}{2}[4h_1^2 - 2h_1h_2 - 2h_1h_3 + 2h_2^2] = 2h_1^2 + h_2^2 - h_1h_2 - h_1h_3 \end{aligned}$$

Si nota che in questo caso non è necessario sostituire le coordinate del punto $(2, 1, 7)$ in quanto x_1, x_2 e x_3 non compaiono nella forma quadratica Q.
Per capire di che punto si tratta si può semplificare l'analisi provando a porre uno o più h nulli e vedere come varia ciò che resta di Q. Se ad esempio si pone $h_1 = 0$, si ha $Q(0, h_2, h_3) = h_2^2$ e in questo caso Q è definita positiva in quanto, escludendo $h_2 = 0$, si ha sempre $Q > 0$. Tuttavia, se si pone $h_2 = 0$, si ha $Q(h_1, 0, h_3) = 2h_1^2 - h_1h_3$ e in questo caso si vede subito come si può ottenere sia $Q > 0$, sia $Q < 0$ (è sufficiente prendere, per esempio, $h_1 = 5$ e $h_3 = 1$ oppure $h_1 = 1$ e $h_3 = 5$). In questo caso Q non è semidefinita. Ne segue che $(2, 1, 7)$ è un punto di sella e di conseguenza f non ha estremanti relativi.

2.5 Esercitazione 3.5

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^3 - x_2$. Allora

1. f ammette un solo punto di massimo relativo;
2. f ammette esattamente due punti di massimo relativo;
3. f ammette esattamente tre punti di massimo relativo;
4. f ammette più di tre punti di massimo relativo.

Si inizia cercando i punti critici di f, ovvero i punti che annullano il gradiente. Occorre quindi calcolare il gradiente e porlo uguale a 0.

$$\nabla f(x_1, x_2) = [2x_1x_2, x_1^2 + 3x_2^2 - 1] = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1x_2 = 0 \\ x_1^2 + 3x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto, dalla prima equazione si ottiene $x_1 = 0$ oppure $x_2 = 0$. Se $x_1 = 0$, dalla seconda equazione si ricava $x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ mentre se $x_2 = 0$ dalla seconda equazione si ricava $x_1 = \pm 1$.
I punti critici trovati sono quindi $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

A questo punto si calcolano le derivate seconde per poi determinare la forma quadratica.

$$D_{11}f(x_1, x_2) = 2x_2$$
$$D_{12}f(x_1, x_2) = D_{21}f(x_1, x_2) = 2x_1$$
$$D_{22}f(x_1, x_2) = 6x_2$$

$$Q(h_1, h_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} D_{ij}f(x_1, x_2)h_ih_j = \frac{1}{2}[(2x_2)h_1h_1 + (2x_1)h_1h_2 + (2x_1)h_2h_1 + (6x_2)h_2h_2] =$$
$$= \frac{1}{2}[2x_2h_1^2 + 4x_1h_1h_2 + 6x_2h_2^2] = x_2h_1^2 + 2x_1h_1h_2 + 3x_2h_2^2 = x_1(2h_1h_2) + x_2(h_1^2 + 3h_2^2)$$

Nel punto $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ si ha $Q(h_1, h_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(h_1^2 + 3h_2^2)$. Q è definita positiva in quanto escludendo il caso in cui tutti gli h sono nulli, ovvero $h_1 = h_2 = 0$, Q è sempre definita positiva. Segue che $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ è un punto di minimo relativo.
Nel punto $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ si ha $Q(h_1, h_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(h_1^2 + 3h_2^2)$. Q è definita negativa in quanto escludendo il caso in cui tutti gli h sono nulli, ovvero $h_1 = h_2 = 0$, Q è sempre definita negativa. Segue che $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ è un punto di massimo relativo.
Nel punto $(1, 0)$ si ha $Q(h_1, h_2) = 2h_1h_2$ mentre nel punto $(-1, 0)$ si ha $Q(h_1, h_2) = -2h_1h_2$. In entrambi i casi a seconda di come si prendono h_1 e h_2 (entrambi positivi, uno positivo e uno negativo o entrambi negativi) si può ottenere $Q < 0$, $Q = 0$ o $Q > 0$. In entrambi i punti quindi Q non è semidefinita. Segue che $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ sono punti di sella.

3 Determinare l'immagine di una funzione

3.1 How to

Prima di iniziare bisogna assicurarsi che la funzione f ristretta all'insieme A sia un intervallo e ammetta massimo e minimo. Per esserne sicuri devono valere i teoremi di Weierstrass e di Bolzano.

Teorema di Weierstrass
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, chiuso e limitato, $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua. Allora:

1. $f(A)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^m$;
2. se $m = 1$, f ammette massimo e minimo.

Teorema di Bolzano
Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi, $f : A \to \mathbb{R}^m$ continua. Allora:

1. $f(A)$ è connesso per archi $\mathbb{R}^m$;
2. se $m = 1$, $f(A)$ è un intervallo.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che A è:

1. **chiuso** se $Fr(A) \subseteq A$;
2. **limitato** se esiste $M \geq 0$ tale che $\|x\| \leq M \ \forall x \in A$;
3. **connesso per archi** se, comunque si prendano $x, y \in A$, esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continua, tali che:
   (a) $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$;
   (b) $\phi([a, b]) \subseteq A$.

Se quindi A è chiuso, limitato, non vuoto e connesso per archi e $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, allora $f(A)$ è un intervallo e ammette massimo e minimo, ovvero $f(A) = [\min_A f, \max_A f]$.

Supponiamo di voler trovare il massimo e il minimo della funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2 + x_3^2$ sull'insieme $A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$.
Dato che A è chiuso, limitato, non vuoto e connesso per archi e $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, $f(A)$ è un intervallo e ammette massimo e minimo, ovvero $f(A) = [\min_A f, \max_A f]$.
Per cominciare è comodo disegnare l'insieme A fornito nel testo dell'esercizio per facilitare l'analisi dell'interno e della frontiera. Nella prima condizione si prende la porzione di piano interna alla circonferenza $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ (con il bordo incluso) e nella seconda condizione si limita questa circonferenza lungo l'asse x_3 fra 0 e 1 (inclusi). A è quindi un cilindro pieno di raggio unitario e di altezza unitaria:
Si comincia a studiare l'interno di A, ovvero $Int(A) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < 1\}$.
Occorre porre a sistema il gradiente nullo della funzione f con le condizioni di $Int(A)$, ovvero

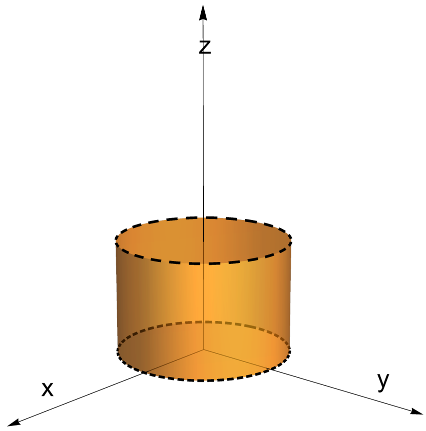
$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ 0 < x_3 < 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -1 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ 0 < x_3 < 1 \end{cases}$$

Il sistema non è risolvibile e pertanto $Int(A)$ non ha punti critici.

La frontiera di A è il "bordo" del cilindro e va di conseguenza suddivisa in più parti.

$$Fr(A) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5$$

In particolare si ha:



1. $V_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < 1, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, ovvero la parte cilindrica strettamente compresa fra 0 e 1;
2. $V_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$, ovvero la parte di piano strettamente all'interno della circonferenza $x_1^2 + x_2^2 < 1$ ad altezza $x_3 = 0$;
3. $V_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 1\}$, ovvero la parte di piano strettamente all'interno della circonferenza $x_1^2 + x_2^2 < 1$ ad altezza $x_3 = 1$;
4. $V_4 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$, ovvero la circonferenza di equazione $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ad altezza $x_3 = 0$;
5. $V_5 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$, ovvero la circonferenza di equazione $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ad altezza $x_3 = 1$.

Le circonferenze V_4 e V_5 sono da studiare a parte e non possono essere considerate direttamente dentro V_1, V_2 e V_3 in quanto sono punti in comune a più parti di frontiera.

Per ciascuna parte della frontiera si pongono le equazioni presenti, $g(x)$, uguali a 0 e si calcola la matrice jacobiana. Se la matrice jacobiana ricavata ha sempre rango massimo, allora si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre $\nabla f(x) = \lambda \cdot \nabla g(x)$. Ponendo poi queste equazioni a sistema con le condizioni (sia equazioni che disequazioni) della parte di frontiera considerata, le eventuali soluzioni saranno punti critici.

V_1 ha l'equazione $x_1^2 + x_2^2 = 1$, quindi $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo tranne nel caso in cui $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Tuttavia, dato che questo punto non appartiene a V_1, si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2, x_3) \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 0 < x_3 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2\lambda x_1 \\ -1 = 2\lambda x_2 \\ 2x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ 0 < x_3 < 1 \end{cases}$$

Si nota subito che non ci sono soluzioni in quanto la terza equazione è in contrasto con l'ultima condizione del sistema.

V_2 ha l'equazione $x_3 = 0$ e quindi $g(x_1, x_2, x_3) = x_3$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo, perciò si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -1 = 0 \\ 2x_3 = \lambda \\ x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni.

V_3 ha l'equazione $x_3 = 1$ e quindi $g(x_1, x_2, x_3) = x_3 - 1$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo, perciò si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ -1 = 0 \\ 2x_3 = \lambda \\ x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni.

V_4 ha le equazioni $x_1^2 + x_2^2 = 1$ e $x_3 = 0$, quindi $g(x_1, x_2, x_3) = [x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3]$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Per capire se la matrice ha rango massimo, ovvero 2, si guardano i minori di ordine 2:

$$\det \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x_1 \qquad \det \begin{pmatrix} 2x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x_2$$

La matrice J ha sempre rango massimo tranne nel caso in cui $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Tuttavia, dato che questo punto non appartiene a V_4, si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot \nabla g_1(x_1, x_2, x_3) + \mu \cdot \nabla g_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2\lambda x_1 + 0 \cdot \mu \\ -1 = 2\lambda x_2 + 0 \cdot \mu \\ 2x_3 = 0 \cdot \lambda + \mu \\ x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2\lambda x_1 \\ -1 = 2\lambda x_2 \\ 2x_3 = \mu \\ x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, ignorando i valori di λ e μ che non servono, sono $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$.

V_5 ha le equazioni $x_1^2 + x_2^2 = 1$ e $x_3 = 1$, quindi $g(x_1, x_2, x_3) = [x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3 - 1]$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Essendo la stessa matrice vista in V_4 sappiamo già che ha sempre rango massimo tranne nel caso in cui $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Tuttavia, dato che questo punto non appartiene a V_5, si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot \nabla g_1(x_1, x_2, x_3) + \mu \cdot \nabla g_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2\lambda x_1 + 0 \cdot \mu \\ -1 = 2\lambda x_2 + 0 \cdot \mu \\ 2x_3 = 0 \cdot \lambda + \mu \\ x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2\lambda x_1 \\ -1 = 2\lambda x_2 \\ 2x_3 = \mu \\ x_3 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, ignorando i valori di λ e μ che non servono, sono $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, -1, 1)$.

Per trovare il massimo e il minimo di $f(A)$ si sostituiscono tutti i punti critici trovati nella funzione f fornita nella consegna. Il valore più basso che si trova è il minimo assoluto e il valore più grande che si trova è il massimo assoluto.

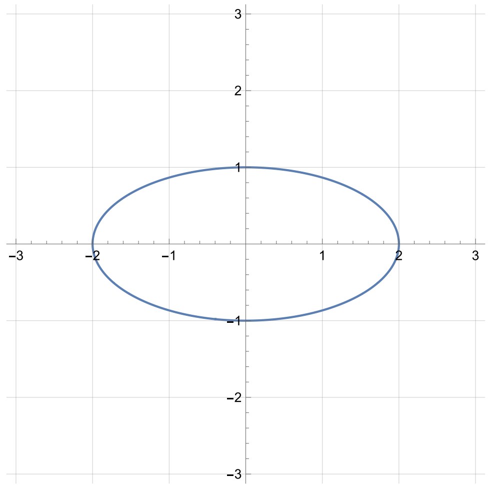
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$$
$$f(0, 1, 0) = -1$$
$$f(0, -1, 0) = 1$$
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{9}{4}$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{9}{4}$$
$$f(0, 1, 1) = 0$$
$$f(0, -1, 1) = 2$$

Si può concludere che $f(A) = [-1, \frac{9}{4}]$.

3.2 Esempio 2.8.4

Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Determinare l'immagine $f(A)$ nel caso di $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$.

Dato che A è chiuso, limitato, non vuoto e connesso per archi e $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, $f(A)$ è un intervallo e ammette massimo e minimo, ovvero $f(A) = [\min_A f, \max_A f]$.



Dato che A è un'ellisse in $\mathbb{R}^2$ occorre studiare soltanto la sua frontiera, definita dall'equazione stessa dell'ellisse.

Data l'equazione dell'ellisse, $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$, si ha $g(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 8x_2 \end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo tranne nel caso in cui $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Tuttavia, dato che questo punto non appartiene a V_1, si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) \\ x_1^2 + 4x_2^2 = 4 \end{cases} \quad \to \begin{cases} 2x_1 = 2\lambda x_1 \\ -1 = 8\lambda x_2 \\ x_1^2 + 4x_2^2 = 4 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, ignorando i valori di λ che non servono, sono $\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}, -\frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{7}}{4}, -\frac{1}{8}\right)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Sostituendo i punti critici trovati nella funzione f si trova il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(A)$.

$$f\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}, -\frac{1}{8}\right) = \frac{65}{16}$$

$$f\left(-\frac{3\sqrt{7}}{4}, -\frac{1}{8}\right) = \frac{65}{16}$$

$$f(0, 1) = -1$$

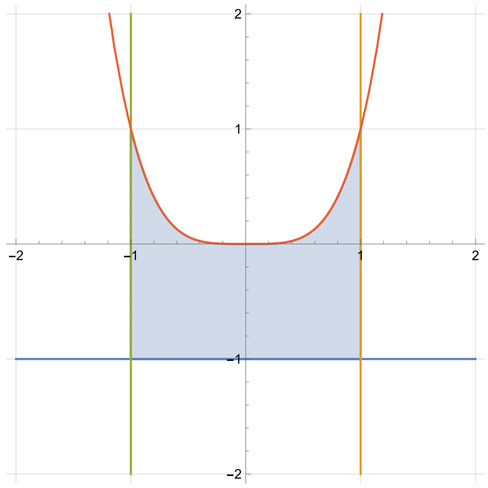
$$f(0, -1) = 1$$

Si può concludere che $f(A) = \left[-1, \frac{65}{16}\right]$.

3.3 Esempio 2.8.7

Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Determinare l'immagine $f(A)$ nel caso di $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_2 \leq x_1^4 \leq 1\}$, $f(x_1, x_2) = x_1^4 - 2x_1x_2^2 - x_2$.

Dato che A è chiuso, limitato, non vuoto e connesso per archi e $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, $f(A)$ è un intervallo e ammette massimo e minimo, ovvero $f(A) = [\min_A f, \max_A f]$.



A è la porzione di piano delimitata da $-1 \leq x_2$, da $x_2 \leq x_1^4$ e da $x_1^4 \leq 1$.

Si comincia a studiare l'interno di A, ovvero $Int(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_2 < x_1^4 < 1\}$. $Int(A)$ si può anche scrivere, per comodità, come due disequazioni separate, ovvero $-1 < x_1 < 1$ e $-1 < x_2 < x_1^4$. Occorre porre a sistema il gradiente nullo della funzione f con le condizioni di $Int(A)$, ovvero

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = (0, 0) \\ -1 < x_1 < 1 \\ -1 < x_2 < x_1^4 \end{cases} \to \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_2^2 = 0 \\ -4x_1x_2 - 1 = 0 \\ -1 < x_1 < 1 \\ -1 < x_2 < x_1^4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova il punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

La frontiera di A va suddivisa in cinque parti, ovvero le singole linee del bordo più una quinta parte per i punti in comune a più parti. Questa quinta parte si può scrivere con le singole equazioni e risolvendo normalmente oppure, più rapidamente, si possono ricavare direttamente le coordinate dei punti dal grafico di A.

$$Fr(A) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5$$

In cui:

$$V_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = x_1^4\}$$
$$V_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_2 < 1, x_1 = 1\}$$
$$V_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = -1\}$$
$$V_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_2 < 1, x_1 = -1\}$$
$$V_5 = \{(1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)\}$$

V_1 ha l'equazione $x_2 = x_1^4$ e quindi $g(x_1, x_2) = x_2 - x_1^4$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -4x_1^3 & 1 \end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo, perciò si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) \\ x_2 = x_1^4 \\ -1 < x_1 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_2^2 = -4\lambda x_1^3 \\ -4x_1x_2 - 1 = \lambda \\ x_2 = x_1^4 \\ -1 < x_1 < 1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema, ignorando il valore di λ che non serve, è $(0, 0)$.

V_2 ha l'equazione $x_1 = 1$ e quindi $g(x_1, x_2) = x_1 - 1$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo, perciò si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) \\ x_1 = 1 \\ -1 < x_2 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_2^2 = \lambda \\ -4x_1x_2 - 1 = 0 \\ x_1 = 1 \\ -1 < x_2 < 1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema, ignorando il valore di λ che non serve, è $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$.

V_3 ha l'equazione $x_2 = -1$ e quindi $g(x_1, x_2) = x_2 + 1$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo, perciò si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) \\ x_2 = -1 \\ -1 < x_1 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_2^2 = 0 \\ -4x_1x_2 - 1 = \lambda \\ x_2 = -1 \\ -1 < x_1 < 1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema, ignorando il valore di λ che non serve, è $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1\right)$.

V_4 ha l'equazione $x_1 = -1$ e quindi $g(x_1, x_2) = x_1 + 1$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo, perciò si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = \lambda \cdot \nabla g(x_1, x_2) \\ x_1 = -1 \\ -1 < x_2 < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_2^2 = \lambda \\ -4x_1x_2 - 1 = 0 \\ x_1 = -1 \\ -1 < x_2 < 1 \end{cases}$$

La soluzione del sistema, ignorando il valore di λ che non serve, è $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$.

Riassumendo, sono stati trovati i punti $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, 0)$, $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1\right)$, $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$ e $(-1, 1)$.

Sostituendo i punti critici trovati nella funzione f si trova il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(A)$.

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{16} \approx 0,69$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f\left(1, -\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8} \approx 1,13$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -1\right) = 1 + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - 2^{\frac{2}{3}} \approx -0,19$$

$$f\left(-1, \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8} \approx 0,88$$

$$f(1,1) = -2$$

$$f(1,-1) = 0$$

$$f(-1,-1) = 4$$

$$f(-1,1) = 2$$

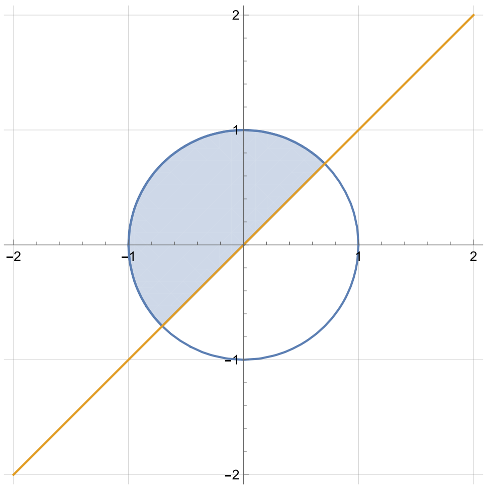
Si può concludere che $f(A) = [-2, 4]$.

3.4 Esercitazione 3.6

Siano $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 - x_2 \leq 0\}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Allora:

1. $\min\limits_A f = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$;
2. $\min\limits_A f = -\sqrt{5}$;
3. f non ammette massimo in A;
4. $\max\limits_A f = -\sqrt{5}$.

Dato che A è chiuso, limitato, non vuoto e connesso per archi e $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, $f(A)$ è un intervallo e ammette massimo e minimo, ovvero $f(A) = [\min\limits_A f, \max\limits_A f]$.



A è la porzione di piano delimitata alla circonferenza $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ e la retta $x_1 - x_2 \leq 0$.

Si comincia a studiare l'interno di A, ovvero $Int(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 - x_2 < 0\}$. Occorre porre a sistema il gradiente nullo della funzione f con le condizioni di $Int(A)$, ovvero

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = (0, 0) \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2 = 0 \\ 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni e pertanto $Int(A)$ non ha punti critici.

La frontiera di A va suddivisa in tre parti, ovvero la semi-circonferenza, il segmento che taglia la circonferenza e i due punti in comune a queste due prime parti.

$$Fr(A) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

In cui:

$$V_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 < 0, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$
$$V_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 - x_2 = 0\}$$
$$V_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 - x_2 = 0\}$$

Nota: V_3 si potrebbe anche scrivere direttamente come i punti in cui la circonferenza e la retta si incrociano, ovvero $V_3 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$, ricavandoli direttamente dal grafico di A e risparmiandosi alcuni calcoli.

V_1 ha l'equazione $x_1^2+x_2^2=1$ e quindi $g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo tranne nel caso in cui $x_1=0$ e $x_2=0$. Tuttavia, dato che questo punto non appartiene a V_1, si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases}\nabla f(x_1,x_2)=\lambda\cdot\nabla g(x_1,x_2)\\ x_1^2+x_2^2=1\\ x_1-x_2<0\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}2=2\lambda x_1\\ 1=2\lambda x_2\\ x_1^2+x_2^2=1\\ x_1-x_2<0\end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, ignorando i valori di λ che non servono, sono $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Tuttavia il primo punto è da scartare in quanto non soddisfa la condizione $x_1-x_2<0$ di V_1 (si deve avere $x_1<x_2$ ma $\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}$).

V_2 ha l'equazione $x_1-x_2=0$ e quindi $g(x_1,x_2)=x_1-x_2$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo, perciò si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases}\nabla f(x_1,x_2)=\lambda\cdot\nabla g(x_1,x_2)\\ x_1-x_2=0\\ x_1^2+x_2^2<1\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}2=\lambda\\ 1=-\lambda\\ x_1-x_2=0\\ x_1^2+x_2^2<1\end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni e pertanto V_2 non ha punti critici.

V_3 ha le equazioni $x_1^2+x_2^2=1$ e $x_1-x_2=0$, quindi $g(x_1,x_2)=[x_1^2+x_2^2-1,x_1-x_2]$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Per capire se la matrice ha rango massimo, ovvero 2, si guarda il minore di ordine 2:

$$\det\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-2x_1-2x_2$$

La matrice J ha sempre rango massimo tranne nel caso in cui $x_1=0$ e $x_2=0$. Tuttavia, dato che questo punto non appartiene a V_3, si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases}\nabla f(x_1,x_2)=\lambda\cdot\nabla g_1(x_1,x_2)+\mu\cdot\nabla g_2(x_1,x_2)\\ x_1-x_2=0\\ x_1^2+x_2^2=1\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}2=2\lambda x_1+\mu\\ 1=2\lambda x_2-\mu\\ x_1-x_2=0\\ x_1^2+x_2^2=1\end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, ignorando i valori di λ e μ che non servono, sono $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Sostituendo i punti critici trovati nella funzione f si trova il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(A)$.

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Si può concludere che $f(A)=\left[-\sqrt{5},\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

3.5 Esame del 13/02/2023

Siano $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2)^2 - 9(x_1^2 + x_2^2) + 18 \leq 0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Determinare $f(A)$.

Per capire meglio com'è fatto A si può porre $k = x_1^2 + x_2^2$. Sostituendo in A si ha

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : k^2 - 9k + 18 \leq 0\}$$

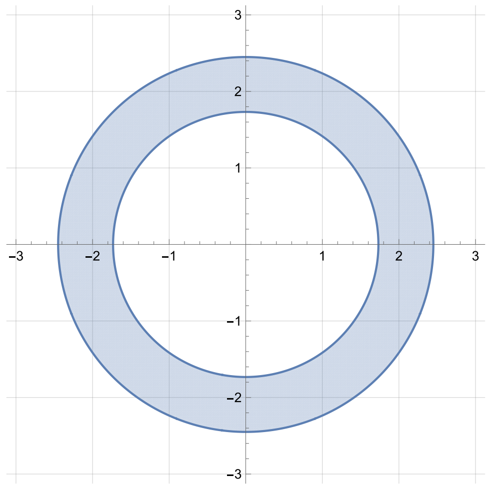
Risolvendo la disequazione di secondo grado, si trovano le due radici:

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

Da cui $3 \leq k \leq 6$. Sostituendo a questo punto $x_1^2 + x_2^2$ al posto di k si ricava

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 6\}$$

ovvero la parte di piano compresa fra la circonferenza di raggio $\sqrt{3}$ e la circonferenza di raggio $\sqrt{6}$:



Dato che A è chiuso, limitato, non vuoto e connesso per archi e $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, $f(A)$ è un intervallo e ammette massimo e minimo, ovvero $f(A) = [\min_A f, \max_A f]$.

Si cominciare a studiare l'interno di A, ovvero $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x_1^2 + x_2^2 < 6\}$. Occorre porre a sistema il gradiente nullo della funzione f con le condizioni di $Int(A)$, ovvero

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2) = (0, 0) \\ 3 < x_1^2 + x_2^2 < 6 \end{cases} \to \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 3 < x_1^2 + x_2^2 < 6 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è il punto $(0, 0)$ ma non soddisfa la condizione $3 < x_1^2 + x_2^2 < 6$ e quindi è da scartare.

La frontiera di A va suddivisa in due parti, ovvero nelle due circonferenze di equazione $x_1^2 + x_2^2 = 3$ e $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

$$Fr(A) = V_1 \cup V_2$$

In cui:

$$V_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 3\}$$

$$V_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 6\}$$

V_1 ha l'equazione $x_1^2+x_2^2=3$ e quindi $g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-3$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo tranne nel caso in cui $x_1=0$ e $x_2=0$. Tuttavia, dato che questo punto non appartiene a V_1, si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases}\nabla f(x_1,x_2)=\lambda\cdot\nabla g(x_1,x_2)\\ x_1^2+x_2^2=3\end{cases}\to\begin{cases}x_2=2\lambda x_1\\ x_1=2\lambda x_2\\ x_1^2+x_2^2=3\end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, ignorando i valori di λ che non servono, sono $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

V_2 ha l'equazione $x_1^2+x_2^2=6$ e quindi $g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-6$. La matrice jacobiana di g vale $J_g(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\end{pmatrix}$ e ha sempre rango massimo tranne nel caso in cui $x_1=0$ e $x_2=0$. Tuttavia, dato che questo punto non appartiene a V_1, si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange e porre

$$\begin{cases}\nabla f(x_1,x_2)=\lambda\cdot\nabla g(x_1,x_2)\\ x_1^2+x_2^2=6\end{cases}\to\begin{cases}x_2=2\lambda x_1\\ x_1=2\lambda x_2\\ x_1^2+x_2^2=6\end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, ignorando i valori di λ che non servono, sono $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$ e $(\sqrt{3},\sqrt{3})$.

Sostituendo i punti critici trovati nella funzione f si trova il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(A)$.

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-\frac{3}{2}$$
$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-\frac{3}{2}$$
$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}$$
$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}$$
$$f(-\sqrt{3},\sqrt{3})=-3$$
$$f(\sqrt{3},-\sqrt{3})=-3$$
$$f(-\sqrt{3},-\sqrt{3})=3$$
$$f(\sqrt{3},\sqrt{3})=3$$

Si può concludere che $f(A)=[-3,3]$.

4 Equazioni differenziali

4.1 How to

4.2 Esame del 10/01/2022

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, indicandone il dominio.

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t}{2-x(t)} \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare del primo ordine a variabili separabili. Riscrivendo infatti l'equazione differenziale come

$$x'(t) = t \cdot \frac{1}{2 - x(t)}$$

si vede la forma $x'(t) = h(t) \cdot g(x(t))$ con $h(t) = t$ e $g(x(t)) = \frac{1}{2-x(t)}$.
Il primo passo è quello di determinare le eventuali soluzioni stazionarie, ovvero quelle che annullano $g(x(t))$. In questo caso $\frac{1}{2-x(t)}$ si annulla per $x(t) = 2$ ma dato che questa soluzione non soddisfa la condizione iniziale la si può scartare.
Si ha allora $x(t) \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. Dalla condizione iniziale si sa che in $t = 0$ $x(0) = 3$ e quindi l'intervallo in cui lavorare sarà $]2, +\infty[$ dato che 3 deve essere incluso.
Separando le variabili, si ha

$$(2 - x(t)) \cdot x'(t) = t$$

$$\int_0^t (2 - x(s)) \cdot x'(s)\, ds = \int_0^t s\, ds$$

$$\left[2x(s) - \frac{x(s)^2}{2}\right]_0^t = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t$$

$$2x(t) - \frac{x(t)^2}{2} - 2 \cdot 3 + \frac{3^2}{2} = \frac{t^2}{2}$$

$$4x(t) - x(t)^2 - 12 + 9 = t^2$$

$$-x(t)^2 + 4x(t) - t^2 - 3 = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si ricava $x(t)$:

$$x(t) = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot (-t^2 - 3)}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4t^2 - 12}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 - 4t^2}}{-2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4(1 - t^2)}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{1 - t^2}}{-2} = 2 \pm \sqrt{1 - t^2}$$

$x(t) = 2 - \sqrt{1 - t^2}$ non soddisfa la condizione iniziale del problema di Cauchy, infatti in $t = 0$ si ha $x(0) = 2 - 1 = 1$. $x(t) = 2 + \sqrt{1 - t^2}$ soddisfa invece la condizione iniziale dato che $x(0) = 2 + 1 = 3$.
In alternativa, si sa che $x(t) \in]2, +\infty[$ e pertanto si dovrebbe avere, se $x(t) = 2 - \sqrt{1 - t^2}$ fosse la soluzione,

$$2 - \sqrt{1 - t^2} > 2$$

$$-\sqrt{1 - t^2} > 0$$

$$\sqrt{1 - t^2} < 0$$

che non è mai verificata. La soluzione dell'equazione differenziale è quindi $x(t) = 2 + \sqrt{1 - t^2}$.

Per determinare la soluzione massimale, sapendo che $x(t) \in]2, +\infty[$, si verifica quando $x(t) > 2$:

$$2 + \sqrt{1 - t^2} > 2$$

$$\sqrt{1 - t^2} > 0$$

$$1 - t^2 > 0$$

$$t^2 < 1$$

che è verificata per $-1 < t < 1$. La soluzione massimale è allora $]-1, 1[$.

Nota: si poteva giungere alla stessa conclusione sulla soluzione massimale studiando il dominio di $x(t)$, che in questo caso si sarebbe ridotto al controllare semplicemente quando l'argomento della radice fosse positivo, ovvero quando $1 - t^2 > 0$. Da questa disequazione si sarebbe poi giunti alla stessa soluzione massimale.

4.3 Esame del 24/01/2022

Determinare la soluzione massimale del seguente problema di Cauchy, specificandone il dominio.

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{1}{3x'(t)} \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine in cui la derivata seconda dipende dalla derivata prima.
Si risolve ponendo $y(t) = x'(t)$. Di conseguenza il problema di Cauchy iniziale diventa

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{3y(t)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

che è un'equazione differenziale non lineare del primo ordine a variabili separabili, del tipo $y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$, con $h(t) = 1$ e $g(y(t)) = \frac{1}{3y(t)}$.
Il primo passo è quello di determinare le eventuali soluzioni stazionarie, ovvero quelle che annullano $g(y(t))$. In questo caso $\frac{1}{3y(t)}$ si annulla per $y(t) = 0$ ma dato che questa soluzione non soddisfa la condizione iniziale la si può scartare.
Si ha allora $y(t) \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Dalla condizione iniziale si sa che in $t = 0$ $y(0) = 2$ e quindi l'intervallo in cui lavorare sarà $]0, +\infty[$ dato che 2 deve essere incluso.
Separando le variabili, si ha

$$3y(t) \cdot y'(t) = 1$$

$$\int_0^t 3y(s) \cdot y'(s)\, ds = \int_0^t 1\, ds$$

$$3\left[\frac{y(s)^2}{2}\right]_0^t = t$$

$$3 \cdot \left(\frac{y(t)^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) = t$$

$$\frac{3}{2}y(t)^2 - 6 = t$$

$$y(t)^2 = \frac{2}{3} \cdot (t + 6)$$

$$y(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}t + 4}$$

Avendo visto che $y(t) \in]0, +\infty[$, allora

$$y(t) = \sqrt{\frac{2}{3}t + 4} = x'(t)$$

Avendo determinato $x'(t)$, si calcola $x(t)$ sapendo che

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t y(s)\, ds$$

Si ha quindi

$$x(t) = 2 + \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}s + 4}\, ds = 2 + \int_0^t \left(\frac{2}{3}s + 4\right)^{\frac{1}{2}} ds$$

Si pone $u = \frac{2}{3}s + 4$. Allora $\frac{du}{ds} = \frac{2}{3}$, da cui segue $ds = \frac{3}{2}du$. L'estremo di integrazione inferiore da 0 diventa $\frac{2}{3} \cdot 0 + 4 = 4$ e l'estremo di integrazione superiore da t diventa $\frac{2}{3}t + 4$. Si ha allora

$$x(t) = 2 + \int_4^{\frac{2}{3}t+4} u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2}\, du = 2 + \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{\frac{2}{3}t+4} = 2 + \sqrt{\left(\frac{2}{3}t + 4\right)^3} - \sqrt{4^3} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}t + 4\right)^3} - 6$$

Per determinare la soluzione massimale, si studia il dominio di $x(t)$. L'argomento della radice deve essere maggiore o uguale a 0:

$$\left(\frac{2}{3}t + 4\right)^3 \geq 0$$

Questa condizione è verificata quando $\frac{2}{3}t + 4 \geq 0$, ovvero $t \geq -6$.
La soluzione massimale è quindi $]-6, +\infty[$.

4.4 Esame del 07/02/2022

Determinare la soluzione massimale del seguente problema di Cauchy, specificandone il dominio.

$$\begin{cases} x'''(t) = t(1 - x''(t))^2 \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 2 \\ x''(0) = 1 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare del terzo ordine in cui $x'''(t)$ dipende da $x''(t)$.
Si risolve ponendo $y(t) = x''(t)$. Di conseguenza il problema di Cauchy iniziale diventa

$$\begin{cases} y'(t) = t(1 - y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

che è un'equazione differenziale non lineare del primo ordine a variabili separabili, del tipo $y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$, con $h(t) = t$ e $g(y(t)) = (1 - y(t))^2$.
Il primo passo è quello di determinare le eventuali soluzioni stazionarie, ovvero quelle che annullano $g(y(t))$. In questo caso $(1-y(t))^2$ si annulla per $y(t) = 1$, che soddisfa la condizione iniziale del problema di Cauchy! Di conseguenza l'equazione differenziale è già risolta e $y(t) = 1 = x''(t)$.
Ci si riconduce quindi al problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) = 1 \\ x(0) = 2 \\ x'(0) = 2 \end{cases}$$

che è un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine del tipo $x''(t) = g(t, x(t))$.
Si risolve moltiplicando il primo membro dell'equazione differenziale per $\frac{1}{2}$ e per 2 e moltiplicando entrambi i membri per $x'(t)$:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x''(t)x'(t) = x'(t)$$

Dato che la derivata di $x'(t)^2$ è uguale a $2x''(t)x'(t)$, si può riscrivere l'equazione sopra come

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x'(t)^2 = x'(t)$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 = \int x'(t)\, dt = x(t) + c$$

Imponendo le due condizioni del problema di Cauchy, $x(0) = 2$ e $x'(0) = 2$, si ricava c nell'intorno di t_0:

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2 + c$$
$$c = 2 - 2 = 0$$

Si può ora ricavare $x'(t)$:

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 = x(t)$$
$$x'(t) = \pm\sqrt{2x(t)}$$

e dato che $x'(0) = 2$ è positivo, allora $x'(t) = \sqrt{2x(t)}$.
Ci si riconduce quindi al problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{2x(t)} \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

che è un'equazione differenziale non lineare del primo ordine a variabili separabili, del tipo $y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$, con $h(t) = 1$ e $g(y(t)) = \sqrt{2x(t)}$. In questo caso la soluzione stazionaria è $x(t) = 0$ ma è evidentemente da scartare.

Si procede ora con i calcoli. Separando le variabili, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2x(t)}} \cdot x'(t) = 1$$

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2x(s)}} \cdot x'(s)\, ds = \int_0^t 1\, ds$$

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(s)}} \cdot x'(s)\, ds = t$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^t (x(s))^{-\frac{1}{2}} \cdot x'(s)\, ds = t$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{(x(s))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^t = t$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sqrt{x(s)} \right]_0^t = t$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{x(t)} - \sqrt{2} \right) = t$$

$$\frac{2\sqrt{x(t)}}{\sqrt{2}} - 2 = t$$

$$\sqrt{x(t)} = \frac{(t+2) \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$x(t) = \frac{(t+2)^2 \cdot 2}{4} = \frac{(t+2)^2}{2}$$

4.5 Esame del 20/06/2022

Determinare, specificandone il dominio, la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) + u(t)^3 \\ u(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli, della forma $x'(t) = a(t)x(t)+b(t)x(t)^\alpha$ in cui $a(t) = -1$, $b(t) = 1$ e $\alpha = 3$. Si procede dividendo tutto per $x(t)^\alpha$ e invertendo le frazioni.
Con qualche calcolo, si ha:

$$\frac{u'(t)}{u(t)^3} = -\frac{u(t)}{u(t)^3} + 1$$
$$u(t)^{-3} \cdot u'(t) = -u(t)^{-2} + 1$$

Ponendo $y(t) := u(t)^{1-\alpha} = u(t)^{-2}$ e derivando, si ha $y'(t) = -2u(t)^{-3} \cdot u'(t)$ e di conseguenza $\frac{y'(t)}{-2} = u(t)^{-3} \cdot u'(t)$. Allora l'equazione

$$u(t)^{-3} \cdot u'(t) = -u(t)^{-2} + 1$$

la si può riscrivere come $\frac{y'(t)}{-2}$ al primo membro e come $-y(t) + 1$ al secondo membro.
La condizione del problema di Cauchy, $u(0) = \frac{1}{2}$, diventa $y(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$.

Si può quindi riscrivere il problema di Cauchy come

$$\begin{cases} \frac{y'(t)}{-2} = -y(t) + 1 \\ y(0) = 4 \end{cases} \to \begin{cases} y'(t) = 2y(t) - 2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine, della forma $y'(t) = a(t)y(t)+b(t)$ in cui $a(t) = 2$ e $b(t) = -2$.
Si utilizza la formula risolutiva

$$y(t) = e^{A(t)} \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} \cdot b(s)\, ds\right) \qquad \text{con } A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

Il calcolo di $A(t)$ è immediato:

$$A(t) = \int_0^t 2\, ds = 2t$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{2t} \cdot \left(4 + \int_0^t e^{-2s} \cdot (-2)\, ds\right) = e^{2t} \cdot \left(4 - 2 \cdot \int_0^t e^{-2s}\, ds\right) = \\ &= e^{2t} \cdot \left(4 - 2 \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-2s}\right]_0^t\right) = e^{2t} \cdot \left(4 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}\right)\right) = \\ &= e^{2t} \cdot \left(4 + e^{-2t} - 1\right) = e^{2t} \cdot \left(3 + e^{-2t}\right) = 3e^{2t} + 1 \end{aligned}$$

Determinato $y(t)$ si può determinare $u(t)$. Dato che $u_0 = \frac{1}{2} > 0$, allora $u(t) = y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} = y(t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y(t)}}$:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{y(t)}} = \frac{1}{\sqrt{3e^{2t} + 1}}$$

4.6 Esame del 22/07/2022

Determinare, specificandone il dominio, la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \tan\left(\frac{x(t)}{t}\right) + \frac{x(t)}{t} \\ x(1) = -\arctan(2) \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare del primo ordine del tipo $x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right)$.
Considerando $t \neq 0$, si pone

$$y(t) := \frac{x(t)}{t}$$

da cui si ricava $x(t) = t \cdot y(t)$ e, di conseguenza, sfruttando la derivata del prodotto, $x'(t) = t \cdot y'(t) + y(t)$.
Allora l'equazione differenziale iniziale si può riscrivere come

$$t \cdot y'(t) + y(t) = \tan(y(t)) + y(t)$$

che, con qualche calcolo, diventa

$$t \cdot y'(t) = \tan(y(t))$$
$$y'(t) = \frac{1}{t} \cdot \tan(y(t))$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, del tipo $y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$, con $h(t) = \frac{1}{t}$ e $g(y(t)) = \tan(y(t))$. Data la condizione iniziale del problema di Cauchy $x(1) = -\arctan(2)$, avendo posto $y(t) = \frac{x(t)}{t}$ si ha adesso $y(1) = \frac{x(1)}{1} = -\arctan(2)$.
Bisogna quindi risolvere

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t} \cdot \tan(y(t)) \\ y(1) = -\arctan(2) \end{cases}$$

Il primo passo è quello di determinare le eventuali soluzioni stazionarie, ovvero quelle che annullano $g(y(t))$. In questo caso $\tan(y(t))$ si annulla per $y(t) = 0$ o $y(t) = \pi$ ma dato che queste soluzioni non soddisfano la condizione iniziale le si può scartare. Inoltre, $\tan(y(t))$ non è definita per $\frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3}{2}\pi$. Segue quindi che $y(t)$ si può trovare soltanto in uno dei quattro quadranti e dato che dalla condizione iniziale si sa che in $t = 1$ $y(t) = -\arctan(2)$, allora $y(t) \in \left]\frac{3}{2}\pi, 0\right[$.

Si procede ora con i calcoli. Separando le variabili, si ha

$$\frac{1}{\tan(y(t))} y'(t) = \frac{1}{t}$$
$$\int_1^t \frac{1}{\tan(y(s))} y'(s)\, ds = \int_1^t \frac{1}{s}\, ds$$
$$\int_1^t \frac{\cos(y(s))}{\sin(y(s))} y'(s)\, ds = [\ln|s|]_1^t$$

L'integrale a sinistra si risolve facilmente notando che $\cos(y(s))$ è la derivata di $\sin(y(s))$. Si può allora sfruttare la proprietà $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$ per risolverlo:

$$[\ln|\sin(y(s))|]_1^t = \ln|t|$$
$$\ln|\sin(y(t))| - \ln|\sin(-\arctan(2))| = \ln|t|$$

Per togliere i moduli, si fanno alcune considerazioni. $\sin(y(t))$ è sicuramente negativo dato che, come visto prima, $y(t)$ si trova nel quarto quadrante. Anche $\sin(-\arctan(2))$ di conseguenza è negativo mentre t è positivo: dato che si era posto inizialmente $t \neq 0$ e la soluzione massimale è un intervallo, significa che sicuramente t è sempre positivo o sempre negativo. Essendo il problema di Cauchy dato in $t = 1$, allora t è sicuramente sempre positivo.

$$\ln(-\sin(y(t))) - \ln(-\sin(-\arctan(2))) = \ln(t)$$
$$\ln\left(\frac{-\sin(y(t))}{-\sin(-\arctan(2))}\right) = \ln(t)$$
$$\frac{\sin(y(t))}{\sin(-\arctan(2))} = t$$
$$\sin(y(t)) = t \cdot \sin(-\arctan(2))$$
$$y(t) = \arcsin(t \cdot \sin(-\arctan(2)))$$

Dato che $x(t) = t \cdot y(t)$ si può ricavare $x(t)$. Sapendo inoltre che $\sin(-\arctan(2)) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, si può scrivere:

$$x(t) = t \cdot \arcsin\left(-\frac{2t}{\sqrt{5}}\right) = -t \cdot \arcsin\left(\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$$

Per determinare la soluzione massimale, si studia il dominio di $x(t)$. L'argomento dell'arcoseno deve essere compreso fra -1 e 1:

$$-1 \leq \frac{2t}{\sqrt{5}} \leq 1$$
$$-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Dato che come visto prima, però, $t \neq 0$ e il problema di Cauchy è dato in $t = 1$, la soluzione massimale è $\left]0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right[$.

4.7 Esame del 01/09/2022

Determinare, specificandone il dominio, la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) = 2e^{x(t)} \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -2\sqrt{e} \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine del tipo $x''(t) = g(t, x(t))$.
Si risolve moltiplicando il primo membro dell'equazione differenziale per $\frac{1}{2}$ e per 2 e moltiplicando entrambi i membri per $x'(t)$:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x''(t)x'(t) = 2e^{x(t)} \cdot x'(t)$$

Dato che la derivata di $x'(t)^2$ è uguale a $2x''(t)x'(t)$, si può riscrivere l'equazione sopra come

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x'(t)^2 = 2e^{x(t)} \cdot x'(t)$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 = \int 2e^{x(t)} \cdot x'(t)\,dt = 2 \cdot \int e^{x(t)} \cdot x'(t)\,dt = 2 \cdot (e^{x(t)} + c)$$

Imponendo le due condizioni del problema di Cauchy, $x(0) = 1$ e $x'(0) = -2\sqrt{e}$, si ricava c nell'intorno di t_0:

$$\frac{1}{2} \cdot (-2\sqrt{e})^2 = 2 \cdot (e^1 + c)$$
$$2e = 2e + 2c$$
$$c = 0$$

Segue

$$\frac{1}{2}x'(t)^2 = 2 \cdot e^{x(t)}$$
$$x'(t)^2 = 4 \cdot e^{x(t)}$$

Dato che $x'(0)$ è negativo, allora

$$x'(t) = -\sqrt{4e^{x(t)}} = -2\sqrt{e^{x(t)}} = -2e^{\frac{x(t)}{2}}$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, del tipo $y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$, con $h(t) = -2$ e $g(y(t)) = e^{\frac{x(t)}{2}}$. Dato che non sono presenti soluzioni stazionarie, si procede subito con i calcoli.
Separando le variabili, si ha

$$e^{-\frac{x(t)}{2}} \cdot x'(t) = -2$$
$$\int_0^t e^{-\frac{x(s)}{2}} \cdot x'(s)\,ds = \int_0^t -2\,ds$$
$$\left[-2e^{-\frac{x(s)}{2}}\right]_0^t = -2t$$
$$-2e^{-\frac{x(t)}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}} = -2t$$
$$e^{-\frac{x(t)}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} + t$$
$$-\frac{x(t)}{2} = \ln(e^{-\frac{1}{2}} + t)$$
$$x(t) = -2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + t\right)$$

Per determinare la soluzione massimale, si studia il dominio di $x(t)$. L'argomento del logaritmo deve essere positivo:

$$\frac{1}{\sqrt{e}+t} > 0$$

$$t > -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

La soluzione massimale è quindi $]-\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$ (e infatti il problema di Cauchy è dato in $t = 0$, che appartiene a questo intervallo).

4.8 Esame del 09/01/2023

Determinare, specificandone il dominio, la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \left(\frac{x(t)}{t}\right)^2 \\ x(-1) = 2 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare del primo ordine del tipo $x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right)$.
Considerando $t \neq 0$, si pone

$$y(t) := \frac{x(t)}{t}$$

da cui si ricava $x(t) = t \cdot y(t)$ e, di conseguenza, sfruttando la derivata del prodotto, $x'(t) = t \cdot y'(t) + y(t)$.
Allora l'equazione differenziale iniziale si può riscrivere come

$$t \cdot y'(t) + y(t) = y(t) + y(t)^2$$

che, con qualche calcolo, diventa

$$t \cdot y'(t) = y(t)^2$$
$$y'(t) = \frac{1}{t} \cdot y(t)^2$$

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, del tipo $y'(t) = h(t) \cdot g(y(t))$, con $h(t) = \frac{1}{t}$ e $g(y(t)) = y(t)^2$. Data la condizione iniziale del problema di Cauchy $x(-1) = 2$, avendo posto $y(t) = \frac{x(t)}{t}$ si ha adesso $y(-1) = \frac{x(-1)}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$.
Bisogna quindi risolvere

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t} \cdot y(t)^2 \\ y(-1) = -2 \end{cases}$$

Il primo passo è quello di determinare le eventuali soluzioni stazionarie, ovvero quelle che annullano $g(y(t))$. In questo caso $y(t)^2$ si annulla per $y(t) = 0$ ma dato che questa soluzione non soddisfa la condizione iniziale la si può scartare. Si ha allora $y(t) \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Dalla condizione iniziale si sa che in $t = 0$ $y(-1) = -2$ e quindi l'intervallo in cui lavorare sarà $]-\infty, 0[$ dato che -2 deve essere incluso.

Si procede ora con i calcoli. Separando le variabili, si ha

$$\frac{1}{y(t)^2} y'(t) = \frac{1}{t}$$
$$\int_{-1}^{t} \frac{1}{y(s)^2} y'(s)\, ds = \int_{-1}^{t} \frac{1}{s}\, ds$$
$$\int_{-1}^{t} y(s)^{-2} y'(s)\, ds = \int_{-1}^{t} \frac{1}{s}\, ds$$
$$\left[\frac{y(s)^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{t} = [\ln|s|]_{-1}^{t}$$
$$\left[-\frac{1}{y(s)}\right]_{-1}^{t} = \ln|t|$$
$$-\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{2} = \ln|t|$$

Dato che dalla condizione iniziale si ha $t \neq 0$ e la soluzione massimale è un intervallo, significa che sicuramente t è sempre positivo o sempre negativo. Dato che il problema di Cauchy è dato in $t = -1$, allora t è sicuramente sempre negativo. Si può quindi togliere il modulo al secondo membro:

$$\frac{1}{y(t)} = -\frac{1}{2} - \ln(-t)$$
$$\frac{1}{y(t)} = -\frac{1 + 2\ln(-t)}{2}$$
$$y(t) = -\frac{2}{1 + 2\ln(-t)}$$

Si può quindi ricavare $x(t)$:

$$x(t) = t \cdot y(t) = -\frac{2t}{1 + 2\ln(-t)}$$

Per determinare la soluzione massimale, si studia il dominio di $x(t)$. In questo caso l'argomento del logaritmo deve essere maggiore di 0 e il denominatore deve essere diverso da 0.
Riguardo all'argomento del logaritmo, la condizione è già soddisfatta: è stato appurato infatti che t è sempre minore di 0 e di conseguenza l'argomento del logaritmo è sempre positivo.
Per avere il denominatore diverso da 0 invece,

$$\begin{gathered} 1 + 2\ln(-t) \neq 0 \\ 2\ln(-t) \neq -1 \\ \ln(-t) \neq -\frac{1}{2} \\ -t \neq e^{-\frac{1}{2}} \\ t \neq -\frac{1}{\sqrt{e}} \end{gathered}$$

I possibili intervalli della soluzione massimale sono quindi

$$\begin{gathered} \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\\ \left]-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right[\\ ]0, +\infty[\end{gathered}$$

La condizione del problema del Cauchy è $x(-1) = 2$. Dato che $t = -1$ deve appartenere al dominio della soluzione massimale, la soluzione massimale è $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$.

4.9 Esame del 30/01/2023

Determinare una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + tx(t)^{-1} \\ x(0) = -2 \end{cases}$$

(ommettere lo studio del dominio).

Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli, della forma $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^\alpha$ in cui $a(t) = 1$, $b(t) = t$ e $\alpha = -1$. Si procede dividendo tutto per $x(t)^\alpha$ e invertendo le frazioni.
Con qualche calcolo, si ha:

$$x'(t) = x(t) + \frac{t}{x(t)}$$
$$x(t)x'(t) = x(t)^2 + t$$

Ponendo $y(t) := x(t)^{1-\alpha} = x(t)^2$ e derivando, si ha $y'(t) = 2x(t)x'(t)$ e di conseguenza $\frac{y'(t)}{2} = x(t)x'(t)$.
Allora l'equazione

$$x(t)x'(t) = x(t)^2 + t$$

la si può riscrivere come $\frac{y'(t)}{2}$ al primo membro e come $y(t) + t$ al secondo membro.
La seconda condizione del problema di Cauchy, $x(0) = -2$, diventa $y(0) = -2^{1-\alpha} = -2^2 = 4$.

Si può quindi riscrivere il problema di Cauchy come

$$\begin{cases} \frac{y'(t)}{2} = y(t) + t \\ y(0) = 4 \end{cases} \to \begin{cases} y'(t) = 2y(t) + 2t \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine, della forma $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$ in cui $a(t) = 2$ e $b(t) = 2t$.
Si utilizza la formula risolutiva

$$y(t) = e^{A(t)} \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} \cdot b(s)\, ds \right) \qquad \text{con } A(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

Il calcolo di $A(t)$ è immediato:

$$A(t) = \int_0^t 2\, ds = 2t$$

Si ha quindi:

$$y(t) = e^{2t} \cdot \left(4 + \int_0^t e^{-2s} \cdot 2s\, ds \right) = e^{2t} \cdot \left(4 + 2 \cdot \int_0^t e^{-2s} \cdot s\, ds \right)$$

Si risolve l'integrale per parti:

$$f = s \to f' = 1$$
$$g' = e^{-2s} \to g = -\frac{1}{2}e^{-2s}$$

Di conseguenza

$$y(t) = e^{2t} \cdot \left(4 + 2 \cdot \left(\left[-\frac{1}{2}e^{-2s} \cdot s \right]_0^t - \int_0^t -\frac{1}{2}e^{-2s}\, ds \right) \right) =$$
$$= e^{2t} \cdot \left(4 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t e^{-2s}\, ds \right) \right) =$$
$$= e^{2t} \cdot \left(4 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-2s} \right]_0^t \right) \right) =$$
$$= e^{2t} \cdot \left(4 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \right) \right) \right) =$$
$$= e^{2t} \cdot \left(4 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} \cdot t - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4} \right) \right) = e^{2t} \cdot \left(4 - e^{-2t} \cdot t - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \right) =$$
$$= e^{2t} \cdot \left(\frac{9}{2} - e^{-2t} \cdot t - \frac{1}{2}e^{-2t} \right) = \frac{9}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(9e^{2t} - 2t - 1 \right)$$

Determinato $y(t)$ si può determinare $x(t)$. Dato che $x_0 = -2 < 0$, allora $x(t) = -y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} = -y(t)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{y(t)}$:

$$x(t) = -\sqrt{y(t)} = -\frac{\sqrt{9e^{2t} - 2t - 1}}{\sqrt{2}}$$

4.10 Esame del 13/02/2023

Determinare, specificandone il dominio, la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) = e^{3x(t)} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine del tipo $x''(t) = g(t, x(t))$.
Si risolve moltiplicando il primo membro dell'equazione differenziale per $\frac{1}{2}$ e per 2 e moltiplicando entrambi i membri per $x'(t)$:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x''(t) \cdot x'(t) = e^{3x(t)} \cdot x'(t)$$

Dato che la derivata di $x'(t)^2$ è uguale a $2x''(t)x'(t)$, si può riscrivere l'equazione sopra come

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}x'(t)^2 = e^{3x(t)} \cdot x'(t)$$

e di conseguenza

$$x'(t)^2 = \int 2e^{3x(t)} \cdot x'(t)\, dt = 2\int e^{3x(t)} \cdot x'(t)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{3}e^{3x(t)} + 2c$$

Imponendo le due condizioni del problema di Cauchy, $x(0) = 0$ e $x'(0) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, si ricava c nell'intorno di t_0:

$$\begin{gathered} \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{2}{3}e^{3\cdot 0} + 2c \\ \frac{3}{2} = \frac{2}{3} + 2c \\ 9 = 4 + 12c \\ c = \frac{5}{12} \end{gathered}$$

Segue

$$x'(t)^2 = \frac{2}{3}e^{3x(t)} + \frac{5}{6}$$

Dato che $x'(0)$ è negativo, allora

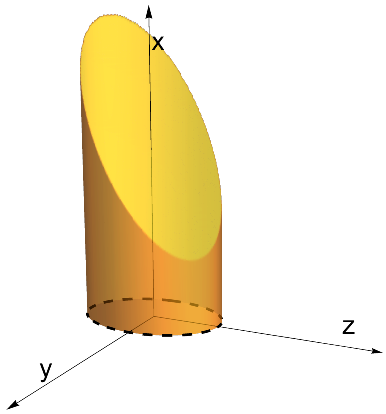
$$x'(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}e^{3x(t)} + \frac{5}{6}}$$

5 Integrali

5.1 How to

Tipi di esercizi
Gli esercizi si dividono tipicamente in due tipologie: quelli in cui bisogna integrare una funzione su A e quelli in cui bisogna calcolare la misura di Lebesgue (L_2 o L_3) di A.

Capire A
Il primo step per gli esercizi sugli integrali è capire come è fatto A sulla base delle diseequazioni fornite. Se le dimensioni sono due, si disegna in un piano cartesiano ciascuna disequazione componente A e A sarà la porzione di piano in comune a tutte le disequazioni (si veda gli esercizi in seguito).
Se in tre dimensioni, tipicamente si tratta di una sfera, un cono o un cilindro e qualche altra disequazione che limita la parte considerata del solido.
Ad esempio, $A = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} \leq 1, x_1 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 6\right\}$ è un cilindro (ellittico) dato dall'ellisse $\frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} \leq 1$. Un'ellisse ha due dimensioni e dato che ci si trova in $\mathbb{R}^3$ questo siginifca che è un cilindro ellittico di altezza infinita; la sua altezza, x_1 in questo caso, è limitata da una parte da $x_1 \geq 0$ (ovvero il piano di equazione $x_1 = 0$) e dall'altra da $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$ (ovvero il piano inclinato di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 6$).
A sarà quindi:



Alcuni solidi tipici in $\mathbb{R}^3$ sono:

- **sfera**: è data da $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2$. Ad esempio $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 3$ è una sfera di raggio $\sqrt{3}$;
- **cilindro**: è dato da $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ (Chiaramente poi le variabili possono essere diverse: in questo caso x_3 sarà l'altezza. Inoltre, prendendo solo l'equazione di un cilindro l'altezza non è limitata, quindi il cilindro ha altezza infinita se non ci sono altre disequazioni che la limitano);
- **cono**: è dato da $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2$.

Nel caso in cui nelle figure sopra compaia qualche valore al denominatore di una delle variabili, significa che quella dimensione specifica non è più circolare ma ellittica: ad esempio il cilindro della figura sopra ha base ellittica in quanto al denominatore di x_2^2 compare 4 e al denominatore di x_3^2 compare 9.
Per capire meglio le figure consiglio di utilizzare il 3D Calculator di GeoGebra (disponibile online), inserendo al posto di x_1, x_2, x_3 le variabili x, y, z e non inserendo disequazioni ma equazioni (=).

Trasformazione delle coordinate

Dopo aver capito come è fatto A, spesso (ma non sempre) è necessario trasformare le coordinate.
Nel caso bidimensionale, quindi in $\mathbb{R}^2$, se sono presenti circonferenze, ellissi o forme simili si utilizzano le coordinate polari:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b} = \rho\sin(\theta) \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = a\rho\cos(\theta) \\ x_2 = b\rho\sin(\theta) \end{cases}$$

con $\rho \geq 0$ distanza dall'origine e $0 \leq \theta < 2\pi$ angolo misurato in senso antiorario a partire dal semiasse delle ascisse positive.
Nel caso tridimensionale, quindi in $\mathbb{R}^3$, ci sono due possibilità: le coordinate cilindriche o le coordinate sferiche. Queste sono necessarie, un po' come nel caso bidimensionale, quando non è possibile integrare facilmente determinando gli estremi di integrazione. Ad esempio, per i solidi descritti precedentemente, è conveniente effettuare il passaggio alle coordinate sferiche se è presente una sfera e alle coordinate cilindriche se è presente un cilindro o un cono.
In particolare, le coordinate cilindriche sono definite nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b} = \rho\sin(\theta) \\ \frac{x_3}{c} = z \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = a\rho\cos(\theta) \\ x_2 = b\rho\sin(\theta) \\ x_3 = cz \end{cases}$$

dove $\rho \in [0, +\infty[$ è la distanza tra l'origine degli assi e la proiezione del punto P sul piano x_1x_2, $\theta \in [0, 2\pi[$ è l'angolo formato tra l'asse degli x_1 positivi e la retta congiungente l'origine e la proiezione del punto P sul piano base x_1x_2 e $z \in]-\infty, +\infty[$ è l'altezza del punto P.

Le coordinate sferiche sono invece definite come:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \frac{x_2}{b} = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \frac{x_3}{c} = \rho\cos(\theta) \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = a\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ x_2 = b\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ x_3 = c\rho\cos(\theta) \end{cases}$$

dove $\rho \in [0, +\infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ e $\theta \in [0, \pi]$ rappresenta la colatitudine ed è l'angolo formato dall'asse degli x_3 positivi con il segmento che unisce l'origine con il punto P.

Nota: nelle equazioni delle figure citate sopra (sia bidimensionali che tridimensionali), nella loro versione completa, al denominatore compaiono i coefficienti a, b e c al quadrato. Questo significa che nell'ellisse citata nella figura di prima, $\frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} \leq 1$, si ha $a = 2$ e $b = 3$. Se ad esempio l'ellisse fosse $2x_2^2 + 3x_3^2 \leq 1$ si avrebbe $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nel caso in cui sia necessario il cambio di coordinate, sono necessari anche i successivi due passaggi prima di poter integrare.

Sostituzione delle coordinate nelle condizioni originali

Dopo aver effettuato il cambio di coordinate, per determinare i nuovi estremi di integrazione occorre sostituire le coordinate appena trovate nelle condizioni originali di A. Ad esempio, nel caso delle coordinate cilindriche in tre dimensioni, si sostituisce $a\rho\cos(\theta)$ a x_1, $b\rho\sin(\theta)$ a x_2 e z a x_3. Dopo di che si svolgono i calcoli e si risolvono tutte le disequazioni presenti in A: se le condizioni sono più stringenti di quelle note, allora gli estremi sono quelli, altrimenti gli estremi restano quelli dati per definizione.
Ad esempio, sempre nelle coordinate cilindriche, si ha $\rho \in [0, +\infty[$. Se eseguendo i calcoli risulta $-3 \leq \rho \leq 3$, si avrà $\rho \in [0, 3]$. Infatti, come detto prima, ρ è una distanza e non può essere negativa.

Calcolo dello jacobiano
Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, vale il teorema del cambiamento di variabile:

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$. un cambiamento di variabile, $A \in \mathcal{M}_n$, $f : A \to [0, +\infty]$ oppure $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che $A \subseteq T(\Omega)$. Allora:

1. $T^{-1}(A) \in \mathcal{M}_n$;
2. f è integrabile su A se e solo se la funzione $x \to f(T(x)) \cdot |det(J_T(x))|$, di dominio $T^{-1}(A)$, è integrabile su $T^{-1}(A)$;
3. nel caso ciò avvenga, $\int_A f(y)\,dy = \int_{T^{-1}(A)} f(T(x)) \cdot |det(J_T(x))|\,dx$.

Occorre quindi determinare lo jacobiano della matrice con i cambiamenti di variabile.

Nel caso delle coordinate polari in due variabili, si ha:

$$\det(J_T(\rho,\theta)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a\cos(\theta) & -a\rho\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & b\rho\cos(\theta) \end{pmatrix} = ab\rho$$

Nel caso delle coordinate cilindriche in tre variabili, si ha:

$$\det(J_T(\rho,\theta,z)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a\cos(\theta) & -a\rho\sin(\theta) & 0 \\ b\sin(\theta) & b\rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc\rho$$

Nel caso delle coordinate sferiche in tre variabili, si ha:

$$\det(J_T(\rho,\theta,\varphi)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} =$$
$$= \det \begin{pmatrix} a\sin(\theta)\cos(\varphi) & a\rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & -a\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ b\sin(\theta)\sin(\varphi) & b\rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & b\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ c\cos(\theta) & -c\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = abc\rho^2\sin(\theta)$$

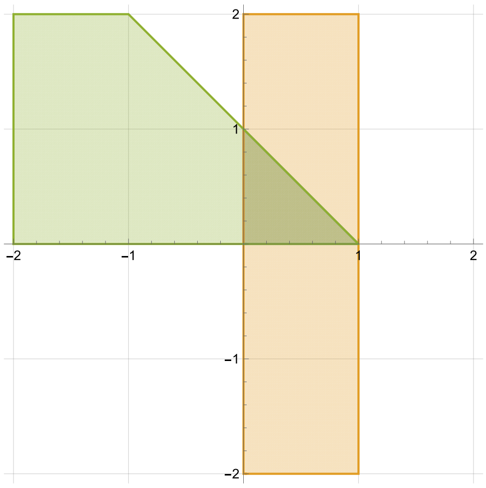
Integrazione
Nel caso in cui è richiesto il calcolo della misura di Lebesgue, all'interno degli integrali si metterà semplicemente 1 (da moltiplicare per il modulo dello jacobiano nel caso in cui è stato effettuato il cambiamento di variabile). Se invece è richiesto di risolvere un integrale con una funzione al suo interno, bisogna sostituire in questa funzione tutte le variabili con le stesse del cambiamento di variabile (e anche in questo caso moltiplicare per il modulo dello jacobiano se è stato effettuato il cambiamento di variabile).

Nota: quando si scrive l'integrale per risolverlo, occorre prestare attenzione all'ordine degli integrali: se in qualche integrale compare una variabile in uno dei due estremi di integrazione, questo non può essere l'integrale più esterno (ovvero l'ultimo da risolvere) in quanto la variabile presente negli estremi non andrebbe via. Occorre quindi lasciare come integrale più esterno uno di quelli senza variabili negli estremi di integrazione.

5.2 Esercizio

Sia $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1 - x_1\}$. Calcolare $\int_A (x_1 + 2x_2)\, dx_1\, dx_2$.

A è la porzione di piano in cui x_1 è compresa fra la retta di equazione $x_1 = 0$ e la retta di equazione $x_1 = 1$ (parte in arancione nel grafico) e x_2 è compresa fra la retta di equazione $x_2 = 0$ e la retta di equazione $x_2 = 1 - x_1$ (parte in verde nel grafico).
A è quindi il triangolo di coordinate $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.



Dato che gli estremi di integrazione sono già definiti, non è necessario trasformare le coordinate. Si ha che

$$x_1 \in [0, 1] \qquad x_2 \in [0, 1 - x_1]$$

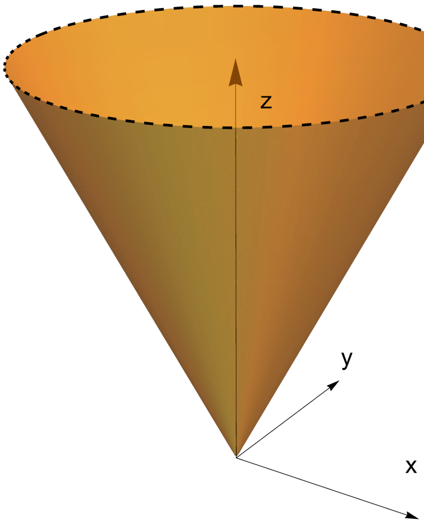
A questo punto si può calcolare l'integrale (nota: dato che nell'estremo superiore di integrazione di x_2 compare la variabile x_1, questo integrale andrà risolto per primo in modo tale da far scomparire la variabile e risolvere l'integrale. Se si integrasse prima rispetto a x_1 e poi rispetto a x_2 resterebbe la variabile x_1 nel risultato).

$$\int_A (x_1 + 2x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (x_1 + 2x_2)\, dx_2\, dx_1 = \int_0^1 \left(x_1 \cdot [x_2]_0^{1-x_1} + 2 \cdot \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^{1-x_1} \right) dx_1 =$$
$$= \int_0^1 \left(x_1 \cdot (1 - x_1) + 2 \cdot \frac{(1 - x_1)^2}{2} \right) dx_1 = \int_0^1 \left(x_1 - x_1^2 + 1 - 2x_1 + x_1^2 \right) dx_1 =$$
$$= \int_0^1 (1 - x_1)\, dx_1 = \left[x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5.3 Esercizio

Sia $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, x_3 > 0\}$. Calcolare $\int_A \frac{e^{-3x_3^2}}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2)}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$.

A è la metà superiore (in cui $x_3 > 0$) di un cono (nota: l'altezza della metà superiore del cono non è limitata).



Essendo A un cono, conviene passare alle coordinate cilindriche. Dato il cono fornito nel testo dell'esercizio, si ha $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.
Passando alle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b} = \rho\sin(\theta) \\ \frac{x_3}{c} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \rho\cos(\theta) \\ x_2 = \rho\sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases}$$

Segue che $T(\rho, \theta, z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)$.

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nelle condizioni di A.
Dalla prima condizione si ricava:

$$(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 \leq z^2$$
$$\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) \leq z^2$$
$$\rho^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \leq z^2$$
$$\rho^2 \leq z^2$$

Ne segue che $-z \leq \rho \leq z$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq z$.
Dalla seconda condizione si ricava:

$$z > 0$$

Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, z] \qquad \theta \in [0, 2\pi[\qquad z \in]0, +\infty[$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho,\theta,z)) = \det\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) = \rho\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = \rho$$

A questo punto si può calcolare l'integrale (nota: dato che nell'estremo superiore di integrazione di ρ compare la variabile z, questo integrale andrà risolto per primo in modo tale da far scomparire successivamente la variabile con gli altri integrali).

$$\int_A \frac{e^{-3x_3^2}}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2)}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^z \frac{e^{-3z^2}}{\sqrt{(\rho^2\cos^2(\theta)+\rho^2\sin^2(\theta))}}\cdot|\det(J_T(\rho,\theta,z))|\,d\rho\,d\theta\,dz =$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^z \frac{e^{-3z^2}}{\rho}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^z e^{-3z^2}\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^{+\infty} e^{-3z^2}\int_0^{2\pi}\int_0^z 1\,d\rho\,d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-3z^2}\int_0^{2\pi}[\rho]_0^z\,d\theta\,dz = \int_0^{+\infty} e^{-3z^2}\int_0^{2\pi} z\,d\theta\,dz = \int_0^{+\infty} z\cdot e^{-3z^2}\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\,dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} z\cdot e^{-3z^2}\cdot[\theta]_0^{2\pi}\,dz = \int_0^{+\infty} z\cdot e^{-3z^2}\cdot 2\pi\,dz = 2\pi\int_0^{+\infty} z\cdot e^{-3z^2}\,dz$$

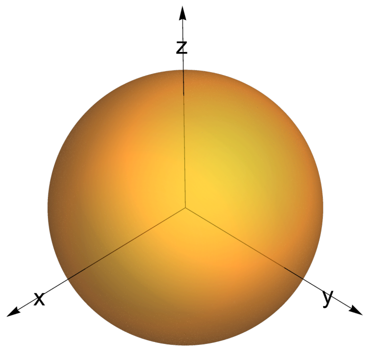
Ponendo $z^2 = u$, si ha $\frac{du}{dz} = 2z$ da cui si ricava $dz = \frac{du}{2z}$. Gli estremi di integrazione restano invariati e si ha quindi

$$2\pi\int_0^{+\infty} e^{-3u}\cdot z\cdot\frac{1}{2z}\,du = \pi\int_0^{+\infty} e^{-3u}\,du = \pi\cdot\left[\frac{e^{-3u}}{-3}\right]_0^{+\infty} = \pi\cdot\frac{-1}{-3} = \frac{\pi}{3}$$

5.4 Esercizio

Sia $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 3\}$. Calcolare $\int_A \sin(\|x\|)\, dx$.

A si può anche scrivere come $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 3\}$ e si può togliere la radice al primo membro elevando entrambi i membri al quadrato, ottenendo $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9\}$. A è quindi una sfera di raggio 3.



Essendo A una sfera, conviene passare alle coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ x_2 = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ x_3 = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

Segue che $T(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin(\theta) \cos(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\theta)$.

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nella condizione di A.
Si ricava:

$$(\rho \sin(\theta) \cos(\varphi))^2 + (\rho \sin(\theta) \sin(\varphi))^2 + (\rho \cos(\theta))^2 \leq 9$$
$$\rho^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \rho^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\theta) \leq 9$$
$$\rho^2 \cdot \left[\sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \cos^2(\theta)\right] \leq 9$$
$$\rho^2 \cdot \left\{\sin^2(\theta) \cdot \left[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right] + cos^2(\theta)\right\} \leq 9$$
$$\rho^2 \cdot \left[\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right] \leq 9$$
$$\rho^2 \leq 9$$

Ne segue che $-3 \leq \rho \leq 3$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq 3$.
Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, 3] \qquad \theta \in [0, \pi] \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho, \theta, \varphi)) = \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} = \rho^2 \sin(\theta)$$

A questo punto si può calcolare l'integrale.

$$\int_A \sin(\|x\|)\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sin(\rho)\cdot|\det(J_T(\rho,\theta,\varphi))|\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sin(\rho)\cdot(\rho^2\sin(\theta))\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi}\sin(\theta)\int_0^{2\pi}\int_0^3(\rho^2\sin(\rho))\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Si risolve l'integrale interno per parti:

$$f = \rho^2 \to f' = 2\rho$$
$$g' = \sin(\rho) \to g = -\cos(\rho)$$

$$\int_0^3(\rho^2\sin(\rho))\,d\rho = [-\rho^2\cos(\rho)]_0^3 - \int_0^3(-2\rho\cos(\rho))\,d\rho = -9\cos(3) + 2\int_0^3(\rho\cos(\rho))\,d\rho$$

Integrando di nuovo per parti:

$$f = \rho \to f' = 1$$
$$g' = \cos(\rho) \to g = \sin(\rho)$$

$$-9\cos(3) + 2\int_0^3(\rho\cos(\rho))\,d\rho = -9\cos(3) + 2\cdot\left\{[\rho\sin(\rho)]_0^3 - \int_0^3\sin(\rho)\,d\rho\right\} =$$
$$= -9\cos(3) + 2\cdot\left\{3\sin(3) - [-\cos(\rho)]_0^3\right\} = -7\cos(3) + 6\sin(3) - 2$$

Risolto il primo integrale, si ha:

$$\int_0^{\pi}\sin(\theta)\int_0^{2\pi}(-7\cos(3)+6\sin(3)-2)\,d\varphi\,d\theta = (-7\cos(3)+6\sin(3)-2)\cdot\int_0^{\pi}\sin(\theta)\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\,d\theta =$$
$$(-7\cos(3)+6\sin(3)-2)\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,d\theta = (-7\cos(3)+6\sin(3)-2)\cdot 2\pi\cdot[-\cos(\theta)]_0^{\pi} =$$
$$= (-7\cos(3)+6\sin(3)-2)\cdot 4\pi$$

5.5 Esame del 09/02/2021

Sia $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_3 \leq 4, x_1^2 + x_2^2 \leq \min\{4, (4 - x_3)^2\}\}$. Allora $L_3(A) =$

1. $\frac{32\pi}{3}$.
2. $\frac{16\pi}{3}$.
3. $\frac{8\pi}{3}$.
4. nesuna delle precedenti.

Nella seconda condizione di A compare la funzione min. Per capire com'è fatto A occorre prima definire la funzione min. Si ha

$$\min\left\{4, (4 - x_3)^2\right\} = \begin{cases} 4 & \text{quando } 4 \leq (4 - x_3)^2 \\ (4 - x_3)^2 & \text{quando } (4 - x_3)^2 \leq 4 \end{cases}$$

Analizzando il primo caso, si ha

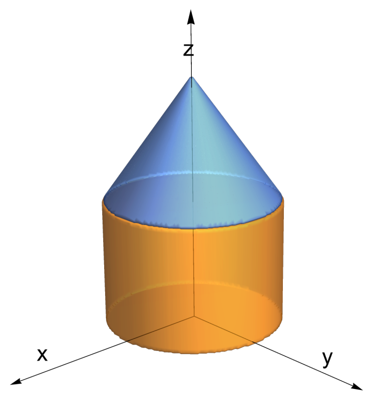
$$4 \leq (4 - x_3)^2$$
$$4 \leq 16 - 8x_3 + x_3^2$$
$$x_3^2 - 8x_3 + 12 \geq 0$$

La cui soluzione è $x_3 \leq 2 \vee x_3 \geq 6$. Di conseguenza la soluzione del secondo caso è invece $2 \leq x_3 \leq 6$. Dato che dalla prima condizione di A si ha $0 \leq x_3 \leq 4$, significa che quando $0 \leq x_3 \leq 2$, $\min\{4, (4 - x_3)^2\} = 4$ e quando $2 \leq x_3 \leq 4$, $\min\{4, (4 - x_3)^2\} = (4 - x_3)^2$. Si scompone quindi A in due casi:

$$A = A_1 \cup A_2$$

In cui

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_3 \leq 2, x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq x_3 \leq 4, x_1^2 + x_2^2 \leq (4 - x_3)^2\}$$



A_1 è un cilindro di raggio 2 e di altezza 2.
A_2 è invece un cono traslato verticalmente, lungo l'asse x_3, di 4. Dato che x_3 è compreso fra 2 e 4 e ad altezza $x_3 = 4$ si sa già che il cono ha raggio nullo, è sufficiente sapere quanto vale il suo raggio a $x_3 = 2$. Sostituendo $x_3 = 2$ dentro $(4 - x_3)^2$ si ricava il raggio di $4 - 2 = 2$.

Avendo definito come è fatto A, risulta semplice ricavare $L_3(A)$ con le formule dei volumi di un cilindro e di un cono:

$$L_3(A_1) = h \cdot \pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 8\pi$$

$$L_3(A_2) = \frac{h \cdot \pi r^2}{3} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2^2}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

Da cui

$$L_3(A) = L_3(A_1) + L_3(A_2) = \frac{24\pi + 8\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}$$

In alternativa, ci si può complicare la vita integrando.
Essendo A_1 un cilindro e A_2 un cono, conviene passare alle coordinate cilindriche. In entrambi i casi si ha $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.
Passando alle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b} = \rho\sin(\theta) \\ \frac{x_3}{c} = z \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = \rho\cos(\theta) \\ x_2 = \rho\sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases}$$

Segue che $T(\rho, \theta, z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)$.

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nelle condizioni di A_1 e A_2.
Si comincia con A_1. Dalla prima condizione si ricava:

$$0 \leq z \leq 2$$

Dalla seconda condizione si ricava:

$$(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 \leq 4$$
$$\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) \leq 4$$
$$\rho^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \leq 4$$
$$\rho^2 \leq 4$$

Ne segue che $-2 \leq \rho \leq 2$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq 2$.
Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, 2] \qquad \theta \in [0, 2\pi[\qquad z \in [0, 2]$$

Si passa ora ad A_2. Dalla prima condizione si ricava:

$$2 \leq z \leq 4$$

Dalla seconda condizione si ricava:

$$(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 \leq (4 - z)^2$$
$$\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) \leq (4 - z)^2$$
$$\rho^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \leq (4 - z)^2$$
$$\rho^2 \leq (4 - z)^2$$

Ne segue che $-4 + z \leq \rho \leq 4 - z$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq 4 - z$ (dalla prima condizione infatti si vede che $2 \leq z \leq 4$ e quindi $-4 + z$ sarà sempre negativo).
Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, 4 - z] \qquad \theta \in [0, 2\pi[\qquad z \in [2, 4]$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho,\theta,z)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) = \rho\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = \rho$$

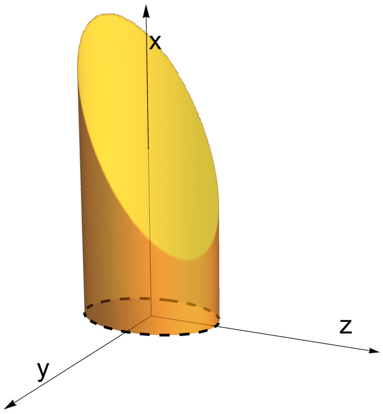
A questo punto si può calcolare $L_3(A) = L_3(A_1) + L_3(A_2)$ (nota: dato che nell'estremo superiore di integrazione di ρ di A_1 compare la variabile z, questo integrale andrà risolto per primo in modo tale da far scomparire la variabile con gli altri integrali).

$$\begin{aligned}
&L_3(A) = L_3(A_1) + L_3(A_2) = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 1 \cdot |\det(J_T(\rho,\theta,z))|\, d\rho\, d\theta\, dz + \int_2^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-z} 1 \cdot |\det(J_T(\rho,\theta,z))|\, d\rho\, d\theta\, dz = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho\, d\rho\, d\theta\, dz + \int_2^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-z} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 d\theta\, dz + \int_2^4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{4-z} d\theta\, dz = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{4}{2}\, d\theta\, dz + \int_2^4 \int_0^{2\pi} \frac{(4-z)^2}{2}\, d\theta\, dz = \\
&= 2 \cdot \int_0^2 \int_0^{2\pi} 1\, d\theta\, dz + \frac{1}{2} \int_2^4 (4-z)^2 \int_0^{2\pi} 1\, d\theta\, dz = \\
&= 2 \cdot 2\pi \int_0^2 1\, dz + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_2^4 (4-z)^2\, dz = \\
&= 2 \cdot 2\pi \cdot 2 + \pi \cdot \int_2^4 (z^2 - 8z + 16)\, dz = \\
&= 8\pi + \pi \cdot \left[\frac{z^3}{3} - 8\frac{z^2}{2} + 16z\right]_2^4 = \\
&= 8\pi + \pi \cdot \left(\frac{64}{3} - 64 + 64 - \frac{8}{3} + 16 - 32\right) = \\
&= 8\pi + \pi \cdot \left(\frac{56}{3} - 16\right) = 8\pi + \frac{8\pi}{3} = \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}$$

5.6 Esame del 21/06/2021

Calcolare $L_3(A)$, con $A = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} \leq 1, x_1 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 6\right\}$.

A è un cilindro con base ellittica di equazione $\frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1$ delimitato dal piano di equazione $x_1 = 0$ e dal piano di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.



Essendo A un cilindro con base ellittica delimitato da due piani, conviene passare alle coordinate cilindriche. Data l'ellisse fornita nel testo dell'esercizio, si ha $a = 2$ e $b = 3$.
Passando alle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x_1 = z \\ \frac{x_2}{a} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_3}{b} = \rho\sin(\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = a\rho\cos(\theta) \\ x_3 = b\rho\sin(\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = 2\rho\cos(\theta) \\ x_3 = 3\rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Segue che $T(\rho, \theta, z) = (2\rho\cos(\theta), 3\rho\sin(\theta), z)$ (nota: in questo caso si usa x_1 per la coordinata z in quanto l'ellisse fornita nel testo dell'esercizio ha come componenti x_2 e x_3).

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nelle condizioni di A.
Dalla prima condizione si ricava:

$$\frac{(2\rho\cos(\theta))^2}{4} + \frac{(3\rho\sin(\theta))^2}{3} \leq 1$$

$$\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) \leq 1$$

$$\rho^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \leq 1$$

$$\rho^2 \leq 1$$

Ne segue che $-1 \leq \rho \leq 1$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq 1$.
Dalla seconda condizione si ricava:

$$z \geq 0$$

Dalla terza condizione si ricava:

$$2\rho\cos(\theta) + 3\rho\sin(\theta) + z \leq 6$$

$$z \leq 6 - 2\rho\cos(\theta) - 3\rho\sin(\theta)$$

Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, 1] \qquad \theta \in [0, 2\pi[\qquad z \in [0, 6 - 2\rho\cos(\theta) - 3\rho\sin(\theta)]$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho,\theta,z)) = \det \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -2\rho\sin(\theta) & 0 \\ 3\sin(\theta) & 3\rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 6\rho\cos^2(\theta) + 6\rho\sin^2(\theta) = 6\rho\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = 6\rho$$

A questo punto si può calcolare $L_3(A)$ (nota: dato che nell'estremo superiore di integrazione di z compaiono altre variabili, questo integrale andrà risolto per primo in modo tale da far scomparire le variabili con gli altri integrali).

$$L_3(A) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{6-2\rho\cos(\theta)-3\rho\sin(\theta)} 1 \cdot |\det(J_T(\rho,\theta,z))|\, dz\, d\theta\, d\rho =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{6-2\rho\cos(\theta)-3\rho\sin(\theta)} 6\rho\, dz\, d\theta\, d\rho = 6\int_0^1 \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{6-2\rho\cos(\theta)-3\rho\sin(\theta)} 1\, dz\, d\theta\, d\rho =$$

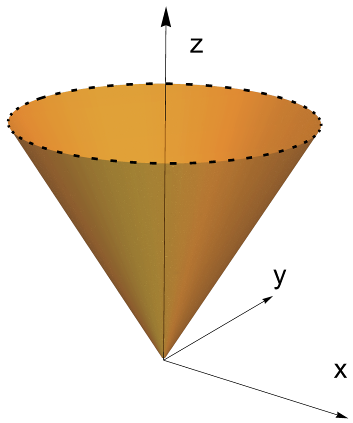
$$= 6\int_0^1 \rho \int_0^{2\pi} 6 - 2\rho\cos(\theta) - 3\rho\sin(\theta)\, d\theta\, d\rho = 6\int_0^1 \rho \cdot \left[6\theta - 2\rho\sin(\theta) + 3\rho\cos(\theta)\right]_0^{2\pi}\, d\rho =$$

$$= 6\int_0^1 \rho \cdot (12\pi + 3\rho - 3\rho)\, d\rho = 72\pi \int_0^1 \rho\, d\rho = 72\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = 72\pi \cdot \frac{1}{2} = 36\pi$$

5.7 Esame del 20/07/2021

Calcolare $\int_A f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$, con $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2\}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_3^2, x_3^{-5}\}|x_1|$.

A è la metà superiore (in cui $x_3 \geq 0$) di un cono (nota: l'altezza della metà superiore del cono non è limitata).



Essendo A un cono, conviene passare alle coordinate cilindriche. Dato il cono fornito nel testo dell'esercizio, si ha $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.
Passando alle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b} = \rho\sin(\theta) \\ \frac{x_3}{c} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \rho\cos(\theta) \\ x_2 = \rho\sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases}$$

Segue che $T(\rho, \theta, z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)$.

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nelle condizioni di A.
Dalla prima condizione si ricava:

$$z \geq 0$$

Dalla seconda condizione si ricava:

$$(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 \leq z^2$$

$$\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) \leq z^2$$

$$\rho^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \leq z^2$$

$$\rho^2 \leq z^2$$

Ne segue che $-z \leq \rho \leq z$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq z$.
Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, z] \qquad \theta \in [0, 2\pi[\qquad z \in [0, +\infty[$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho,\theta,z)) = \det\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \rho\cos^2(\theta)+\rho\sin^2(\theta) = \rho\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = \rho$$

A questo punto si può calcolare l'integrale (nota: dato che nell'estremo superiore di integrazione di ρ compare la variabile z, questo integrale andrà risolto per primo in modo tale da far scomparire successivamente la variabile con gli altri integrali).

$$\int_A \min\{x_3^2, x_3^{-5}\}|x_1|\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^z \min\{z^2,z^{-5}\}\cdot|\rho\cos(\theta)|\cdot|\det(J_T(\rho,\theta,z))|\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^z \min\{z^2,z^{-5}\}\cdot|\rho\cos(\theta)|\cdot\rho\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$= \int_0^{+\infty}\min\{z^2,z^{-5}\}\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\int_0^z \rho^2\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$= \int_0^{+\infty}\min\{z^2,z^{-5}\}\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\cdot\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^z d\theta\,dz =$$
$$= \int_0^{+\infty}\min\{z^2,z^{-5}\}\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\cdot\frac{z^3}{3}\,d\theta\,dz = \frac{1}{3}\cdot\int_0^{+\infty}z^3\cdot\min\{z^2,z^{-5}\}\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\,d\theta\,dz =$$

Si risolve per comodità l'integrale interno a parte.

$$\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\,d\theta = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos(\theta)\,d\theta + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}-\cos(\theta)\,d\theta = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos(\theta)\,d\theta - \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos(\theta)\,d\theta =$$
$$= [\sin(\theta)]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} - [\sin(\theta)]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = [1-(-1)]-[-1-1] = 4$$

Tornando all'integrale:

$$\frac{1}{3}\cdot\int_0^{+\infty}z^3\cdot\min\{z^2,z^{-5}\}\int_0^{2\pi}|\cos(\theta)|\,d\theta\,dz = \frac{4}{3}\cdot\int_0^{+\infty}z^3\cdot\min\{z^2,z^{-5}\}\,dz$$

Per procedere occorre studiare la funzione $\min\{z^2,z^{-5}\}$. Si ha

$$\min\{z^2,z^{-5}\} = \begin{cases} z^2 & \text{quando } z^2 \le z^{-5}\\ z^{-5} & \text{quando } z^{-5}\le z^2\end{cases}$$

Analizzando il primo caso, si ha

$$z^2 \le z^{-5}$$
$$z^2 \le \frac{1}{z^5}$$
$$z^7 \le 1$$

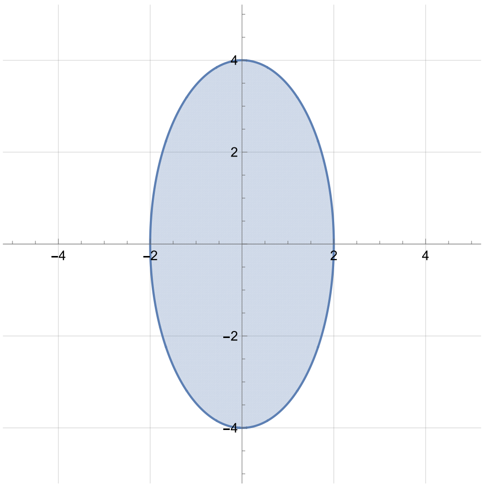
La cui soluzione è $z \le 1$. Di conseguenza la soluzione del secondo caso è invece $z \ge 1$.
Occorre quindi spezzare l'integrale da 0 a $+\infty$ in due integrali: il primo ha come estremi 0 e 1 e $\min\{z^2,z^{-5}\} = z^2$ mentre il secondo ha come estremi 1 e $+\infty$ e $\min\{z^2,z^{-5}\} = z^{-5}$.

$$\frac{4}{3}\cdot\int_0^{+\infty}z^3\cdot\min\{z^2,z^{-5}\}\,dz = \frac{4}{3}\cdot\int_0^1 z^3\cdot z^2\,dz + \frac{4}{3}\int_1^{+\infty}z^3\cdot z^{-5}\,dz =$$
$$= \frac{4}{3}\cdot\int_0^1 z^5\,dz + \frac{4}{3}\int_1^{+\infty}z^{-2}\,dz = \frac{4}{3}\cdot\left[\frac{z^6}{6}\right]_0^1 + \frac{4}{3}\cdot\left[-\frac{1}{z}\right]_1^{+\infty} =$$
$$= \frac{4}{18}+\frac{4}{3} = \frac{14}{9}$$

5.8 Esame del 03/09/2021

Calcolare $\int_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$, con $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+\frac{x_2^2}{4}\le 4\}$, $f(x_1,x_2)=\max\left\{x_1+\frac{x_2}{2}, x_1-\frac{x_2}{2}\right\}$.

A è l'area interna di un'ellisse.



Essendo A un'ellisse, conviene passare alle coordinate polari. Data l'ellisse fornita nel testo dell'esercizio, si ha $a=1$ e $b=2$.
Passando alle coordinate polari:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a}=\rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b}=\rho\sin(\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{1}=\rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{2}=\rho\sin(\theta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=\rho\cos(\theta) \\ x_2=2\rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Segue che $T(\rho,\theta)=(\rho\cos(\theta), 2\rho\sin(\theta))$.

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nella condizione di A.
Si ricava:

$$(\rho\cos(\theta))^2+\frac{(2\rho\sin(\theta))^2}{4}\le 4$$

$$\rho^2\cos^2(\theta)+\frac{4\rho^2\sin^2(\theta)}{4}\le 4$$

$$\rho^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)\le 4$$

$$\rho^2\le 4$$

Ne segue che $-2\le\rho\le 2$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0\le\rho\le 2$.
Si può quindi concludere che

$$\rho\in[0,2] \qquad \theta\in[0,2\pi[$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho,\theta))=\det\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta) & 2\rho\cos(\theta)\end{pmatrix}=2\rho\cos^2(\theta)+2\rho\sin^2(\theta)=2\rho\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)=2\rho$$

A questo punto si può calcolare l'integrale.

$$\int_A \max\left\{x_1 + \frac{x_2}{2}, x_1 - \frac{x_2}{2}\right\} dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \max\left\{\rho\cos(\theta) + \frac{2\rho\sin(\theta)}{2}, \rho\cos(\theta) - \frac{2\rho\sin(\theta)}{2}\right\} \cdot |\det(J_T(\rho,\theta))|\, d\rho\, d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \max\{\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\} \cdot 2\rho\, d\rho\, d\theta =$$
$$= 2\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^2 \max\{\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\} \cdot \rho\, d\rho\, d\theta =$$

Per procedere occorre studiare la funzione $\max\{\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\}$. Si ha

$$\max\{\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\} =$$
$$= \begin{cases} \rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta) & \text{quando } \rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta) \geq \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta) \\ \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta) & \text{quando } \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta) \geq \rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Analizzando il primo caso, si ha

$$\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta) \geq \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)$$

$$2\rho\sin(\theta) \geq 0$$

La cui soluzione è $0 \leq \theta \leq \pi$. Di conseguenza la soluzione del secondo caso è invece $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Occorre quindi spezzare l'integrale su θ in due integrali: il primo ha come estremi 0 e π e

$$\max\{\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\} = \rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta)$$

mentre il secondo ha come estremi π e 2π e

$$\max\{\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\} = \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)$$

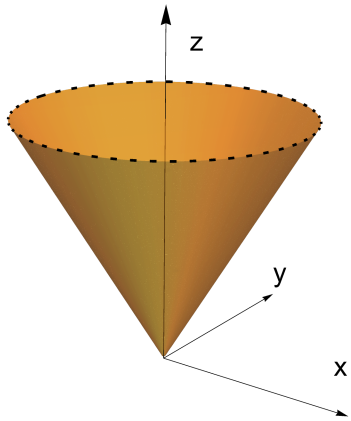
Tornando all'integrale, si ha

$$2\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^2 \max\{\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\} \cdot \rho\, d\rho\, d\theta =$$
$$2\cdot\int_0^{\pi}\int_0^2 (\rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta)) \cdot \rho\, d\rho\, d\theta + 2\cdot\int_\pi^{2\pi}\int_0^2 (\rho\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)) \cdot \rho\, d\rho\, d\theta =$$
$$= 2\cdot\int_0^{\pi}\int_0^2 (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \cdot \rho^2\, d\rho\, d\theta + 2\cdot\int_\pi^{2\pi}\int_0^2 (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \cdot \rho^2\, d\rho\, d\theta =$$
$$= 2\cdot\int_0^{\pi} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \int_0^2 \rho^2\, d\rho\, d\theta + 2\cdot\int_\pi^{2\pi} (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \int_0^2 \rho^2\, d\rho\, d\theta =$$
$$= 2\cdot\int_0^{\pi} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \int_0^2 \rho^2\, d\rho\, d\theta + 2\cdot\int_\pi^{2\pi} (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \int_0^2 \rho^2\, d\rho\, d\theta =$$
$$= 2\cdot\int_0^{\pi} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 d\theta + 2\cdot\int_\pi^{2\pi} (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 d\theta =$$
$$= \frac{16}{3}\cdot\int_0^{\pi} (\cos(\theta) + \sin(\theta))\, d\theta + \frac{16}{3}\cdot\int_\pi^{2\pi} (\cos(\theta) - \sin(\theta))\, d\theta =$$
$$= \frac{16}{3}\cdot[\sin(\theta) - \cos(\theta)]_0^\pi + \frac{16}{3}\cdot[\sin(\theta) + \cos(\theta)]_\pi^{2\pi} =$$
$$= \frac{16}{3}\cdot(0 + 1 - 0 + 1) + \frac{16}{3}\cdot(0 + 1 - 0 + 1) = \frac{64}{3}$$

5.9 Esame del 01/09/2022

Sia $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, x_3 \geq 0\}$. Calcolare $\int_A e^{-5(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$.

A è la metà superiore (in cui $x_3 \geq 0$) di un cono (nota: l'altezza della metà superiore del cono non è limitata).



Essendo A un cono, conviene passare alle coordinate cilindriche. Dato il cono fornito nel testo dell'esercizio, si ha $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$.
Passando alle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b} = \rho\sin(\theta) \\ \frac{x_3}{c} = z \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = \rho\cos(\theta) \\ x_2 = \rho\sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases}$$

Segue che $T(\rho, \theta, z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)$.

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nelle condizioni di A.
Dalla prima condizione si ricava:

$$(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 \leq z^2$$
$$\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) \leq z^2$$
$$\rho^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \leq z^2$$
$$\rho^2 \leq z^2$$

Ne segue che $-z \leq \rho \leq z$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq z$.
Dalla seconda condizione si ricava:

$$z \geq 0$$

Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, z] \qquad \theta \in [0, 2\pi[\qquad z \in [0, +\infty[$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho,\theta,z)) = \det\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \rho\cos^2(\theta)+\rho\sin^2(\theta) = \rho\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = \rho$$

A questo punto si può calcolare l'integrale (nota: dato che nell'estremo superiore di integrazione di ρ compare la variabile z, questo integrale andrà risolto per primo in modo tale da far scomparire successivamente la variabile con gli altri integrali).

$$\int_A e^{-5(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^z e^{-5(\rho^2+z^2)}\cdot|\det(J_T(\rho,\theta,z))|\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^z e^{-5(\rho^2+z^2)}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^z e^{-5\rho^2}\cdot e^{-5z^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \int_0^{+\infty} e^{-5z^2}\int_0^{2\pi}\int_0^z \rho\cdot e^{-5\rho^2}\,d\rho\,d\theta\,dz$$

Ponendo $\rho^2 = u$, si ha $\frac{du}{d\rho} = 2\rho$ da cui si ricava $d\rho = \frac{du}{2\rho}$. L'estremo di integrazione inferiore resta invariato mentre l'estremo superiore diventa z^2. Si ha quindi

$$\int_0^{+\infty} e^{-5z^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{z^2}\rho\cdot e^{-5u}\cdot\frac{1}{2\rho}\,du\,d\theta\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-5z^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{z^2} e^{-5u}\,du\,d\theta\,dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-5z^2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{5}e^{-5u}\right]_0^{z^2} d\theta\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-5z^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-5z^2}\right)d\theta\,dz =$$
$$= \frac{1}{10}\int_0^{+\infty} e^{-5z^2}\cdot\left(1-e^{-5z^2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta\,dz = \frac{1}{10}\int_0^{+\infty} e^{-5z^2}\cdot\left(1-e^{-5z^2}\right)\cdot 2\pi\,dz =$$
$$= \frac{\pi}{5}\int_0^{+\infty} e^{-5z^2}\cdot\left(1-e^{-5z^2}\right)dz = \frac{\pi}{5}\int_0^{+\infty} e^{-5z^2}-e^{-10z^2}\,dz$$

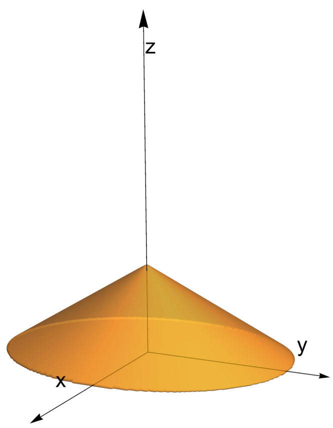
Non è possibile proseguire ulteriormente senza utilizzare la funzione errore.

5.10 Esame del 09/01/2023

Sia $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1^2}{9} \leq (4 - x_3)^2, 4 > x_3 \geq 0\}$. Calcolare $\int_A (4 - x_3)^{-\frac{3}{2}} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$.

Nota: nella consegna del testo viene riportato $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_1^2}{9} \leq (4 - x_3)^2$ ma è un refuso e il secondo x_1 è in realtà x_2 (fu corretto dal prof. durante l'esame ma mai corretto nel file con gli esercizi).

A è un cono ellittico traslato verticalmente di 4. Di questo cono poi si prende soltanto la parte con $0 \leq x_3 < 4$.



Essendo A un cono, conviene passare alle coordinate cilindriche. Dato il cono fornito nel testo dell'esercizio, si ha $a = 2$, $b = 3$ e $c = 1$.
Passando alle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho \cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b} = \rho \sin(\theta) \\ \frac{x_3}{c} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{2} = \rho \cos(\theta) \\ \frac{x_2}{3} = \rho \sin(\theta) \\ \frac{x_3}{1} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\rho \cos(\theta) \\ x_2 = 3\rho \sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases}$$

Segue che $T(\rho, \theta, z) = (2\rho \cos(\theta), 3\rho \sin(\theta), z)$.

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nelle condizioni di A.
Dalla prima condizione si ricava:

$$\frac{(2\rho \cos(\theta))^2}{4} + \frac{(3\rho \sin(\theta))^2}{9} \leq (4 - z)^2$$

$$\frac{4\rho^2 \cos^2(\theta)}{4} + \frac{9\rho^2 \sin^2(\theta)}{9} \leq (4 - z)^2$$

$$\rho^2 \left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \leq (4 - z)^2$$

$$\rho^2 \leq (4 - z)^2$$

Ne segue che $-4 + z \leq \rho \leq 4 - z$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq 4 - z$ (dalla seconda condizione infatti si vede che $0 \leq z < 4$ e quindi $-4 + z$ sarà sempre negativo).
Dalla seconda condizione si ricava:

$$0 \leq z < 4$$

Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, 4 - z] \qquad \theta \in [0, 2\pi[\qquad z \in [0, 4[$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho,\theta,z)) = \det\begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -2\rho\sin(\theta) & 0 \\ 3\sin(\theta) & 3\rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6\rho\cos^2(\theta) + 6\rho\sin^2(\theta) =$$
$$= 6\rho\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = 6\rho$$

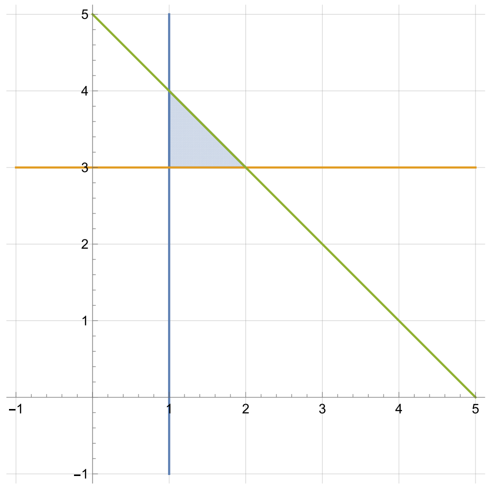
A questo punto si può calcolare l'integrale (nota: dato che nell'estremo superiore di integrazione di ρ compare la variabile z, questo integrale andrà risolto per primo in modo tale da far scomparire successivamente la variabile con gli altri integrali).

$$\int_A (4-x_3)^{-\frac{3}{2}}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{4-z}(4-z)^{-\frac{3}{2}}\cdot|\det(J_T(\rho,\theta,z))|\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$= \int_0^4\int_0^{2\pi}\int_0^{4-z}(4-z)^{-\frac{3}{2}}\cdot 6\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = 6\cdot\int_0^4(4-z)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{4-z}\rho\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$= 6\cdot\int_0^4(4-z)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{4-z}d\theta\,dz = 6\cdot\int_0^4(4-z)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{(4-z)^2}{2}\,d\theta\,dz =$$
$$= 3\cdot\int_0^4(4-z)^2\cdot(4-z)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}1\,d\theta\,dz = 6\pi\cdot\int_0^4(4-z)^{\frac{1}{2}}\,dz =$$
$$= 6\pi\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot(4-z)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = 6\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\right) = 6\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot 8 = 32\pi$$

5.11 Esame del 30/01/2023

Sia $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 3, x_1 + x_2 \leq 5\}$. Calcolare $\int_A \frac{1}{x_2}\, dx_1\, dx_2$.

A è la porzione di piano compresa fra la retta di equazione $x_1 = 1$, la retta di equazione $y = 3$ e la retta di equazione $x + y = 5$.
A è quindi il triangolo di coordinate $(1, 3)$, $(2, 3)$ e $(1, 4)$.



In questo caso gli estremi inferiori delle due variabili di integrazione sono già definiti da $x_1 \geq 1$ e da $x_2 \geq 3$; con la terza condizione si ricava poi l'estremo superiore di una variabile e si lascia l'altro in funzione dell'altra variabile. Uno dei due estremi deve necessariamente essere in funzione dell'altra variabile in quanto si integra su un triangolo: se tutti gli estremi fossero definiti si integrerebbe su un quadrato.
Infatti, se si considerassero come estremi di integrazione 1 e 2 per x_1 e 3 e 4 per x_2, calcolandone la misura di Lebesgue $L_2(A) = \int_3^4 \int_1^2 1\, dx_1\, dx_2 = 1$ mentre è evidente (graficamente) che l'area è pari a $\frac{1}{2}$.
Come estremi di integrazione in questo caso ci sono due soluzioni equivalenti: nel primo caso si ha x_1 compreso fra 1 e $5 - x_2$ e x_2 compreso fra 3 e 4, nel secondo si ha x_1 compreso fra 1 e 2 e x_2 compreso fra 3 e $5 - x_1$. Entrambe le opzioni portano allo stesso risultato.
Per svolgere l'esercizio si prenderà il primo caso ma lo svolgimento è analogo (e con lo stesso risultato) prendendo il secondo caso. Provando a calcolare $L_2(A)$ con questi estremi di integrazione si ha la giusta misura di Lebesgue di A, ovvero $L_2(A) = \int_3^4 \int_1^{5-x_2} 1\, dx_1\, dx_2 = \frac{1}{2}$.
Si ha quindi che

$$x_1 \in [1, 5 - x_2] \qquad x_2 \in [3, 4]$$

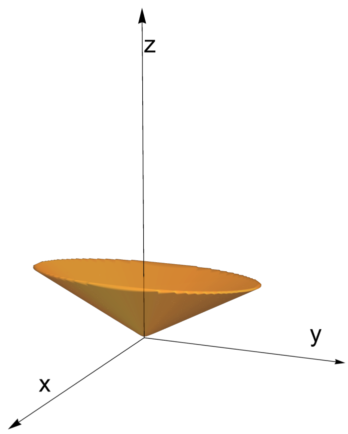
A questo punto si può calcolare l'integrale.

$$\int_A \frac{1}{x_2}\, dx_1\, dx_2 = \int_3^4 \int_1^{5-x_2} \frac{1}{x_2}\, dx_1\, dx_2 = \int_3^4 \frac{1}{x_2} \int_1^{5-x_2} 1\, dx_1\, dx_2 =$$
$$= \int_3^4 \left(\frac{1}{x_2} \cdot [x_1]_1^{5-x_2} \right) dx_2 = \int_3^4 \left(\frac{1}{x_2} \cdot (5 - x_2 - 1) \right) dx_2 = \int_3^4 \left(\frac{5 - x_2 - 1}{x_2} \right) dx_2 =$$
$$= \int_3^4 \left(\frac{4}{x_2} - 1 \right) dx_2 = [4 \ln |x_2| - x_2]_3^4 = 4\ln(4) - 4 - 4\ln(3) + 3 = 4 \ln\left(\frac{4}{3}\right) - 1$$

5.12 Esame del 13/02/2023

Sia $A = \{x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + \frac{x_2^2}{9} \leq x_3^2, 0 \leq x_3 \leq 1\}$. Calcolare $\int_A (1+x_3)^{-1}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$.

A è un cono di cui si prende soltanto la parte in cui $0 \leq x_3 \leq 1$.



Essendo A un cono, conviene passare alle coordinate cilindriche. Dato il cono fornito nel testo dell'esercizio, si ha $a = 1$, $b = 3$ e $c = 1$.
Passando alle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{b} = \rho\sin(\theta) \\ \frac{x_3}{c} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{1} = \rho\cos(\theta) \\ \frac{x_2}{3} = \rho\sin(\theta) \\ \frac{x_3}{1} = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \rho\cos(\theta) \\ x_2 = 3\rho\sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases}$$

Segue che $T(\rho, \theta, z) = (\rho\cos(\theta), 3\rho\sin(\theta), z)$.

Per ottenere gli estremi di integrazione, si sostituiscono le coordinate appena ottenute nelle condizioni di A.
Dalla prima condizione si ricava:

$$(\rho\cos(\theta))^2 + \frac{(3\rho\sin(\theta))^2}{9} \leq z^2$$

$$\rho^2\cos^2(\theta) + \frac{9\rho^2\sin^2(\theta)}{9} \leq z^2$$
$$\rho^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \leq z^2$$
$$\rho^2 \leq z^2$$

Ne segue che $-z \leq \rho \leq z$. Essendo tuttavia ρ la distanza dall'origine, questa non può essere negativa e quindi $0 \leq \rho \leq z$.
Dalla seconda condizione si ricava:

$$0 \leq z \leq 1$$

Si può quindi concludere che

$$\rho \in [0, z] \qquad \theta \in [0, 2\pi[\qquad z \in [0, 1]$$

Dato che è stato effettuato un cambiamento di variabile, è necessario anche calcolare lo jacobiano di T:

$$\det(J_T(\rho,\theta,z)) = \det\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0\\ 3\sin(\theta) & 3\rho\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 3\rho\cos^2(\theta) + 3\rho\sin^2(\theta) =$$
$$= 3\rho\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = 3\rho$$

A questo punto si può calcolare l'integrale (nota: dato che nell'estremo superiore di integrazione di ρ compare la variabile z, questo integrale andrà risolto per primo in modo tale da far scomparire successivamente la variabile con gli altri integrali).

$$\int_A (1+x_3)^{-1}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z (1+z)^{-1}\cdot|\det(J_T(\rho,\theta,z))|\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^z (1+z)^{-1}\cdot 3\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = 3\cdot\int_0^1 \frac{1}{1+z}\int_0^{2\pi}\int_0^z \rho\,d\rho\,d\theta\,dz =$$
$$= 3\cdot\int_0^1\frac{1}{1+z}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^z d\theta\,dz = 3\cdot\int_0^1\frac{1}{1+z}\int_0^{2\pi}\frac{z^2}{2}\,d\theta\,dz = \frac{3}{2}\cdot\int_0^1\frac{z^2}{1+z}\int_0^{2\pi}1\,d\theta\,dz =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot\int_0^1\frac{z^2}{1+z}\cdot 2\pi\,dz = 3\pi\cdot\int_0^1\frac{z^2}{1+z}\,dz = 3\pi\cdot\int_0^1\left(\frac{1}{1+z}+z-1\right)dz =$$
$$= 3\pi\cdot\left[\ln|1+z| + \frac{z^2}{2} - z\right]_0^1 = 3\pi\cdot\left(\ln(2)+\frac{1}{2}-1\right) = 3\pi\cdot\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)$$