Assegnati N punti equispaziati della seguente funzione: $f(x) = (1+x)^2 - (9+2x)^7, \;\; x \in [-5, 5]$ calcolare i coefficienti del polinomio $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ di grado $n \in \mathbb{N}$ che approssima i punti ai minimi quadrati.
Definire quindi la matrice A opportuna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^n \end{bmatrix}$$

e i vettori

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}$$

per risolvere il problema ai minimi quadrati

$$\min_{\alpha} ||A\alpha - y||_2^2$$

e calcolare i coefficienti α del polinomio approssimante $p(x)$.
Per risolvere il sistema lineare ottenuto, utilizzare il metodo della decomposizione ai valori singolari (SVD).
Fissare $N = 15$ e variare $n \in \{4, 7, 12\}$.

- Per ciascun valore di n, creare una unica figura con il grafico della funzione esatta $f(x)$ insieme a quello del polinomio di approssimazione $p(x)$. Evidenziare anche gli N punti noti.
- Calcolare la norma 2 dell'errore di approssimazione, commesso sugli N nodi, per ciascuna prova.
- Calcolare il valore dell'errore in norma 2 commesso nel punto $x = 0$, per tutte le prove.

Caricare il notebook in un file zip.