

Ricostruzione di immagini  
○○○○○○○

Blur  
○○○○○

Modello discreto di formazione dell'immagine  
○○○○○○○

Image deblurring  
○○○

Metodi di regolarizzazione  
○○○○○○○○○○○○○○○○○○

## Image deblur (ricostruzione di immagini)

November 18, 2021

Ricostruzione di immagini  
○○○○○○○

Blur  
○○○○○

Modello discreto di formazione dell'immagine  
○○○○○○○

Image deblurring  
○○○

Metodi di regolarizzazione  
○○○○○○○○○○○○○○○○○○

## Testi di riferimento:

- ▶ Deblurring Images, Matrices, Spectra and Filtering. P.C.Hansen, J.G.Nagy, D. P. O'Leary, SIAM
- ▶ Introduction to inverse problems, M. Bertero, P. Boccacci, IOP, 1998

## Il problema della ricostruzione di immagini

- ▶ Una immagine digitale è un array 2D che contiene informazioni su un oggetto che non è osservabile direttamente.
- ▶ Queste informazioni consistono usualmente in una rappresentazione degradata dell'oggetto originale.
- ▶ Si possono distinguere due sorgenti di degradazione:
  - ▶ il processo di formazione dell'immagine (blurring, processo deterministico);
  - ▶ il processo di misurazione dell'immagine (noise, processo statistico).

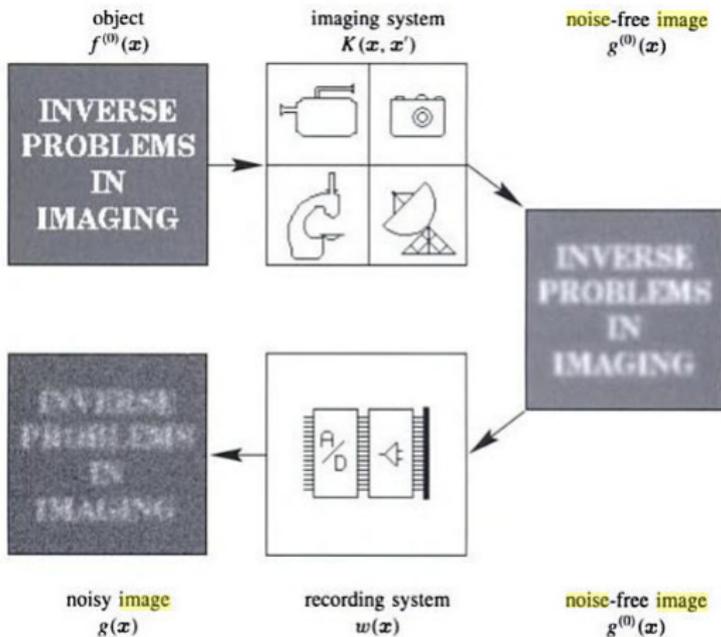


Figure 3.2. Schematic representation of the formation of the noisy image  $g$ .

Dati:

- ▶ immagine acquisita, degradata da rumore e blurring
- ▶ qualche informazione sul blurring e il rumore

Obiettivo:

- ▶ ricostruire una buona approssimazione dell'oggetto reale



oggetto reale

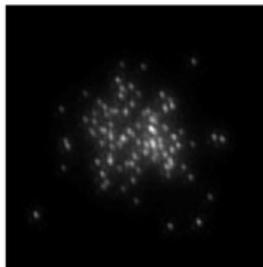


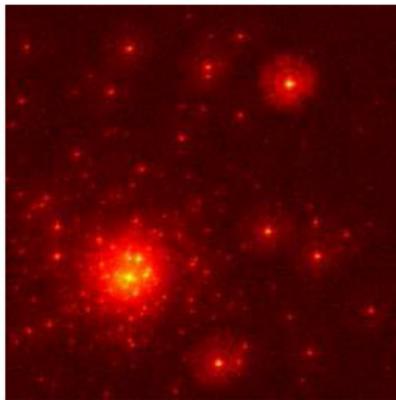
immagine acquisita



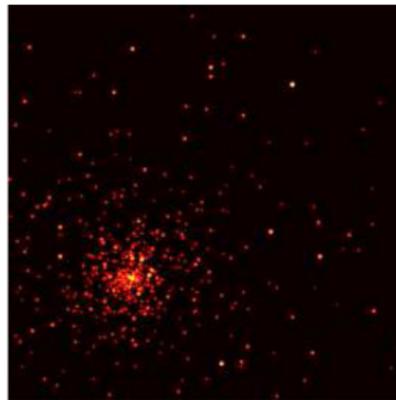
ricostruzione?

# Applicazioni: astronomia

Observed data

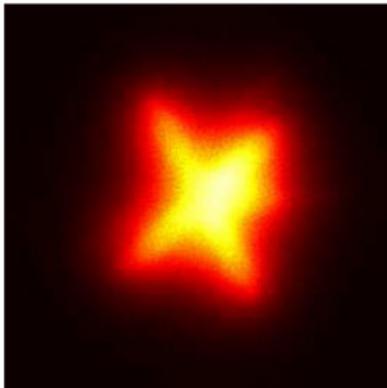


Restored data

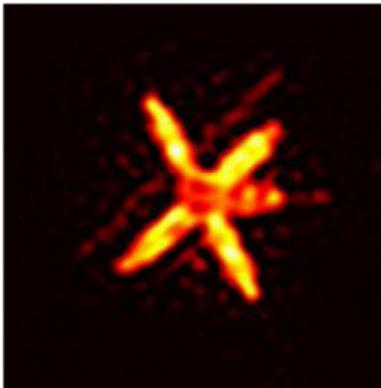


## Applicazioni: osservazioni spaziali

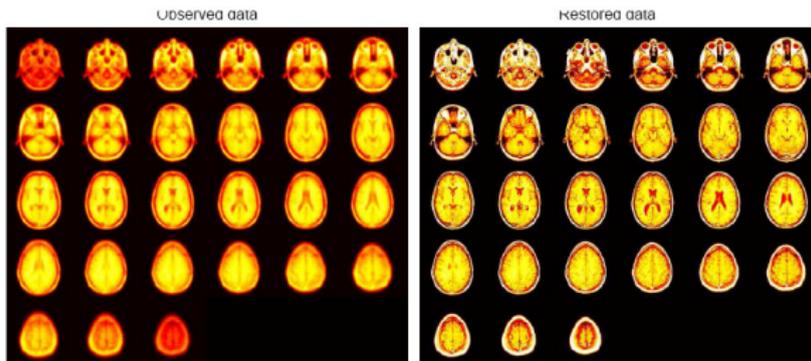
Observed data



Restored data

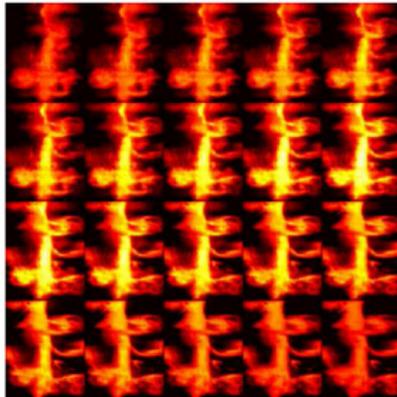


# Applicazioni: imaging medico

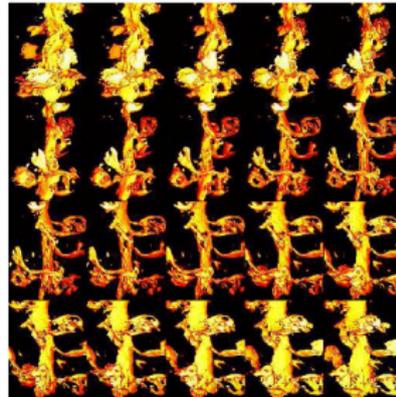


# Applicazioni: microscopia

Observed data



Restored data



## Sistema di formazione dell'immagine

- ▶ Un sistema di formazione di immagini (camera digitale, telecamera, microscopio, telescopio ecc.) è un sistema fisico di trasmissione di segnali. In questo caso il segnale può essere una funzione di due variabili spaziali (immagini 2D)  $f(s, t)$  e l'output una funzione  $g(u, v)$ .
- ▶ La risposta in impulso del sistema fornisce l'immagine di sorgenti puntiformi di intensità 1. Tali immagini non sono puntiformi ma piuttosto simili a piccole macchie.
- ▶ Per tale motivo, nel caso di sistemi di formazione di immagini la risposta in impulso viene detta point spread function (PSF), ossia "funzione di allargamento del punto".
- ▶ L'effetto della PSF sull'oggetto  $f$  viene detto **blurring** (annebbiamento o sfocamento) in quanto l'immagine  $g$  è una versione dell'oggetto  $f$  in cui i dettagli sono meno nitidi.

## PSF

$$\mathcal{A}(X) = \mathcal{A} \left( \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \right) = \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} = B,$$

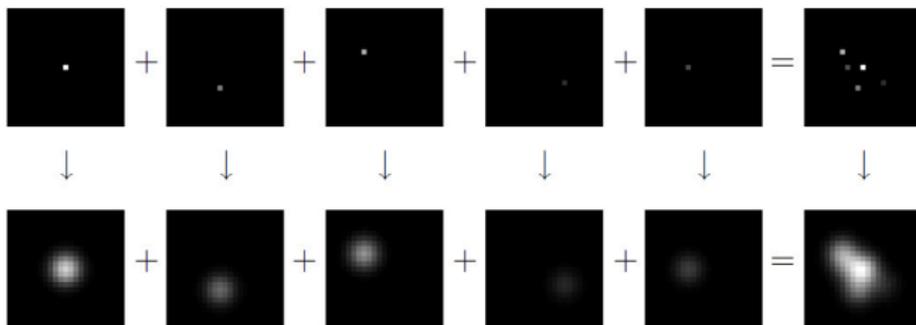
- ▶ l'oggetto  $X$  è detto **Single Pixel Image (SPI)**
- ▶ l'immagine  $B$  è detta **Point Spread Function (PSF)**

## Sistemi spazio invarianti

- ▶ Svitati sistemi di formazione di immagini godono della proprietà (a volte approssimata, ma comunque molto utile) che la forma dell'immagine di un punto luminoso non dipende dalla posizione del punto. Tali sistemi, che sono anche detti **spazio invarianti**, sono evidentemente sistemi invarianti per traslazioni.

## Sistemi spazio invarianti (2)

Spazio invarianza dell'operatore  $H \Rightarrow$  la PSF è la stessa per ogni posizione del pixel non nullo nella SPI



- ▶ Prima riga: Immagini SPI
- ▶ Seconda riga: immagini PSF

## Modello discreto

- ▶ Nel modello continuo precedentemente introdotto,  $g(u, v)$  è la distribuzione spaziale, nel piano immagine, della grandezza fisica (qualunque sia il suo significato) che rappresenta l'immagine dell'oggetto incognito  $f(s, t)$ .
- ▶ Tale grandezza fisica è sostanzialmente un segnale analogico che deve essere convertito in un segnale digitale per ogni successiva elaborazione.
- ▶ Tale conversione viene solitamente effettuata mediante una CCD camera (CCD = coupled charged device) che è sostanzialmente un array di sensori. Ogni sensore fornisce una misura locale del valore dell'immagine  $g(u, v)$ .

## Cerchiamo un modello matematico discreto di formazione dell'immagine.

Consideriamo che:

1. Un primo effetto del sistema di sensori è la trasformazione dell'immagine continua in un'immagine discreta (immagine digitale). Pertanto è opportuno sostituire il modello continuo, precedentemente introdotto, con il corrispondente modello discreto.
2. Il secondo effetto è che ogni sensore non fornisce un valore esatto di  $g$ , che indicheremo con  $g_0$ , ma un suo valore approssimato dovuto all'**effetto del rumore**. Il valore dell'immagine nel pixel  $(n, m)$  fornito dal rivelatore non coincide con  $g(n, m)$  a causa di svariati fenomeni che vanno sotto il nome di noise. Tali fenomeni hanno carattere aleatorio.

Tuttavia, prima di fornire una descrizione del rumore, è opportuno introdurre la discretizzazione del problema.

## Modello matematico di formazione dell'immagine

Il modello matematico di formazione dell'immagine diventa pertanto

$$g(u, v) = \int \int K(u - s, v - t) f(s, t) ds dt \quad (1)$$

$g$  pertanto è il prodotto di convoluzione di  $f$  e  $K$

## Prodotto di convoluzione 1D

Consideriamo per semplicità il caso in una dimensione.

- ▶ Caso continuo.

$$g(u) = \int K(u - s)f(s)ds \quad (2)$$

- ▶ Caso discreto.

per  $n, n' = 0, \dots, N - 1$ , la differenza  $n - n'$  assume i  $2N - 1$  valori  $-(N - 1), \dots, N - 1$

$$g(n) = \sum_{n'=0}^{N-1} K(n - n' + N/2)f(n') \quad (3)$$

- ▶ In forma matriciale:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f}, \quad (\mathbf{A})_{n,n'} = K(n - n' + N/2)$$

## Prodotto di convoluzione 2D

- Procedendo in maniera del tutto analoga, nel caso 2D, si ottiene la discretizzazione del prodotto di convoluzione:

$$g(n, m) = \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{N-1} K(n - n' + N/2, m - m' + N/2) f(n', m') \quad (4)$$

- La notazione usuale è

$$\mathbf{g} = \mathbf{K} * \mathbf{f} \quad (5)$$

dove  $*$  indica il prodotto di convoluzione

- Anche in questo caso si può esprimere il prodotto di convoluzione in forma matriciale:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

dove  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{f}$  sono vettori di dimensione  $N^2$  ottenuti riordinando le colonne delle matrici  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{f}$ .

## Esempio: $N = 2$

$$\begin{aligned}
 g_{m,n} &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} K_{m-k+1, n-l+1} f_{k,l} \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} (K_{m-0+1, n-l+1} f_{0,l} + K_{m-1+1, n-l+1} f_{1,l}) \\
 &= K_{m-0+1, n-0+1} f_{0,0} + K_{m-1+1, n-0+1} f_{1,0} + K_{m-0+1, n-1+1} f_{0,1} + K_{m-1+1, n-1+1} f_{1,1} \\
 &= \begin{pmatrix} K_{m+1, n+1} & K_{m, n+1} & K_{m+1, n} & K_{m, n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ f_{0,1} \\ f_{1,1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$g_{0,0} = \begin{pmatrix} K_{0-0+1,0-0+1} & K_{0-1+1,0-0+1} & K_{0-0+1,0-1+1} & K_{0-1+1,0-1+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ f_{0,1} \\ f_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$g_{1,0} = \begin{pmatrix} K_{1-0+1,0-0+1} & K_{1-1+1,0-0+1} & K_{1-0+1,0-1+1} & K_{1-1+1,0-1+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ f_{0,1} \\ f_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$g_{0,1} = \begin{pmatrix} K_{0-0+1,1-0+1} & K_{0-1+1,1-0+1} & K_{0-0+1,1-1+1} & K_{0-1+1,1-1+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ f_{0,1} \\ f_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$g_{1,1} = \begin{pmatrix} K_{1-0+1,1-0+1} & K_{1-1+1,1-0+1} & K_{1-0+1,1-1+1} & K_{1-1+1,1-1+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ f_{0,1} \\ f_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g_{0,0} \\ g_{1,0} \\ g_{0,1} \\ g_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{0,1} & K_{1,0} & K_{0,0} \\ K_{2,1} & K_{1,1} & K_{2,0} & K_{1,0} \\ K_{1,2} & K_{0,2} & K_{1,1} & K_{0,1} \\ K_{2,2} & K_{1,2} & K_{2,1} & K_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0,0} \\ f_{1,0} \\ f_{0,1} \\ f_{1,1} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

## Modello di formazione-registrazione dell'immagine

Il modello discreto di formazione dell'immagine può quindi essere scritto come:

$$\mathbf{g}_{\text{exact}} = \mathbf{K} * \mathbf{f} \quad (6)$$

dove  $\mathbf{f}$  è l'oggetto incognito \* indica il prodotto di convoluzione e  $\mathbf{K}$  la PSF.

- ▶ Pertanto si vede che, se si considera questa come un'equazione avente come incognita l'oggetto  $\mathbf{f}$ , risulta indispensabile conoscere la PSF  $\mathbf{K}$  del sistema di formazione di immagini.
- ▶ Il rumore di lettura è additivo; in altri termini si può scrivere, getta  $g$  la matrice dell'immagine osservata e successivamente riordinando la matrice  $g$  in un vettore  $\mathbf{g}$ :

$$g(n, m) = g_{\text{exact}}(n, m) + w(n, m)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\text{exact}} + \mathbf{w}$$

- ▶ In genere il modello più accreditato per il rumore di lettura è quello del **rumore Gaussiano bianco**, rumore casuale con distribuzione gaussiana con media nulla.

Pertanto un problema di ricostruzione di immagini è il **problema di determinare una stima di un oggetto incognito  $f$  essendo data la sua immagine e la PSF dello strumento utilizzato**

- ▶ Nel seguito si indicherà con  $\mathbf{A}$  la matrice definita dal prodotto di convoluzione con la PSF  $\mathbf{K}$ ; si porrà quindi:

$$\mathbf{g} = \mathbf{K} * \mathbf{f} + \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{w} \quad (7)$$

- ▶ Il problema di ricostruzione di immagini consiste nel determinare un oggetto  $\mathbf{f}$  tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{g} \quad (8)$$

essendo note  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{A}$

( $\mathbf{A}$  è la matrice circolante a blocchi definita dalla convoluzione ciclica di  $\mathbf{f}$  con  $\mathbf{K}$ ).

- ▶ Si tratta quindi di studiare la o le soluzioni di questo sistema lineare e capire se forniscono un'approssimazione ragionevole dell'**oggetto incognito  $f^*$** . **Questo problema è solitamente mal condizionato!**

## Il problema della ricostruzione di immagini

- ▶ Un problema di ricostruzione di immagini può essere ricondotto ad un problema di deconvoluzione. Tale problema è **mal posto**, nel senso che la sua soluzione può non esistere, non essere unica e non dipendere con continuità dai dati.
- ▶ Un primo approccio è fornito da una riformulazione come **problema ai minimi quadrati** non vincolato:

$$\min_{\mathbf{f}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2$$

Tuttavia la soluzione risulta ancora numericamente instabile.

- ▶ Questa difficoltà può essere aggirata mediante i **metodi di regolarizzazione**.

## Metodo ai minimi quadrati

- ▶ Si dice **soluzione ai minimi quadrati del problema di ricostruzione di immagini**, ogni oggetto  $\mathbf{f}$  che risolve il problema di minimo

$$\min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 \quad (9)$$

- ▶ La soluzione del problema ai minimi quadrati **non è stabile rispetto al rumore**; una piccola perturbazione dei dati dovuta al noise è sufficiente ad alterare completamente la soluzione e quindi a renderla priva di qualunque significato fisico.

## Metodi di regolarizzazione

- ▶ Lo studio dei precedenti problemi variazionali introduce il concetto di **metodo di regolarizzazione**, introdotto dal matematico russo A. Tikhonov.
- ▶ Per un problema variazionale che, come la minimizzazione del funzionale ai minimi quadrati, soffre di patologie quali la non unicità del minimo e/o la sua instabilità rispetto al noise, la regolarizzazione consiste nell'aggiunta di un funzionale di "penalizzazione", detto **funzionale di regolarizzazione**, moltiplicato per un parametro positivo, detto **parametro di regolarizzazione**, in modo tale che il funzionale modificato abbia uno ed un solo punto di minimo che sia meno sensibile all'effetto del noise.

## Metodi di regolarizzazione

- ▶ Nei metodi di regolarizzazione il problema di ricostruzione di immagini viene riformulato come un problema di minimo non vincolato

$$\min_{\mathbf{f}} \mathcal{F}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \lambda\Phi(\mathbf{f}) \quad (10)$$

dove

- ▶  $\Phi(\mathbf{f})$  è il termine di regolarizzazione
- ▶  $\mathcal{F}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  è il termine di consistenza coi dati (nel nostro caso particolare  $\mathcal{F}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$ )
- ▶  $\lambda$  è il parametro di regolarizzazione

## Metodi di regolarizzazione

- ▶ Le soluzioni regolarizzate formano una famiglia ad un parametro di soluzioni approssimate del problema di ricostruzione di immagini. Al variare del parametro di regolarizzazione queste soluzioni descrivono una traiettoria nello spazio di tutti i possibili oggetti.
- ▶ Per valori piccoli del parametro di regolarizzazione si ha una soluzione che è molto sensibile al noise ma che ben riproduce i dati; al contrario, per valori grandi del parametro di regolarizzazione si ha una soluzione che è molto stabile ma che mal riproduce i dati.
- ▶ Il problema è dunque trovare un valore di che permetta un compromesso tra stabilità della soluzione e rappresentazione dei dati.

## Principio della discrepanza

- ▶ Un criterio di scelta del parametro di regolarizzazione è il **principio della discrepanza di Morozov** che sceglie  $\lambda$  in modo tale che la corrispondente soluzione regolarizzata soddisfi la relazione

$$\|\mathbf{A}\mathbf{f}_\lambda - \mathbf{g}\| = \tau \|\mathbf{w}\|, \quad \tau > 1 \quad (11)$$

## Metodo di Tikhonov

Nel metodo di Tikhonov

- ▶  $\mathcal{F}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2$
- ▶  $\Phi(\mathbf{f}) = \|\mathbf{D}\mathbf{f}\|^2$ ,  $\mathbf{D}$  è la matrice identità o la discretizzazione di un operatore differenziale

## Regolarizzazione con altre norme

- ▶ Vi sono molte altre possibili scelte del termine di regolarizzazione. Un modo per generalizzare la regolarizzazione è utilizzare altre norme :

$$\Phi(\mathbf{f}) = \|\mathbf{Df}\|_p^p$$

dove  $\|\cdot\|_p$  è la norma  $p$  definita da

$$\|\mathbf{z}\|_p = (|z_1|^p + \dots + |z_n|^p)^{1/p}$$

- ▶ Solitamente si sceglie  $1 \leq p \leq 2$  perchè  $p > 2$  porta a immagini troppo regolari con pochi dettagli.

- ▶ Anche se questo può sembrare un piccolo cambiamento, la soluzione è molto diversa.
- ▶ La ragione è che il termine di regolarizzazione  $\|\mathbf{Df}\|_p^p$  con  $p < 2$  penalizza gli elementi di  $\mathbf{D}$  grandi in modulo meno della norma 2 e più è piccolo  $p$  minore è questa penalizzazione.
- ▶ Se si utilizza  $p = 2$ , allora il termine di regolarizzazione  $\|\mathbf{Df}\|_2^2$  penalizza drammaticamente gli elementi di  $\mathbf{D}$  grandi in modulo; questo equivale a richiedere che le derivate parziali della soluzione siano piccole ovunque nell'immagine. Pertanto, questo approccio favorisce soluzioni molto regolari (smooth).

- ▶ Se si utilizza un termine di regolarizzazione  $\|\mathbf{Df}\|_p^p$  con  $p$  vicino ad uno, allora si permette alle derivate parziali di essere più grandi in certe regioni limitate dell'immagine. Questo consente di ricostruire meglio i bordi e le discontinuità nell'immagine.
- ▶ Tuttavia, il problema di minimo corrispondente è molto più difficile da risolvere.

## Metodo di regolarizzazione mediante la Variazione Totale

- ▶ Il funzionale di **Variazione Totale** è definito come

$$\Phi_{\text{TV}}(\mathbf{f}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{f}(x, y)| dx dy$$

dove

- ▶  $\nabla \mathbf{f}(x, y) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right)^T$
  - ▶  $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ▶ Equivalentemente è definito come

$$\Phi_{\text{TV}}(\mathbf{f}) = \|\nabla \mathbf{f}(x, y)\|_1$$

- ▶ Il problema di ricostruzione di immagini mediante il funzionale di Variazione Totale è allora formulato come il problema di minimizzazione non lineare

$$\min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \lambda\Phi_{\text{TV}}(\mathbf{f})$$

- ▶ Le maggiori difficoltà nella risoluzione di tale problema sono legate alla non differenziabilità della norma 1
- ▶ Una strategia comune consiste nel considerare il problema modificato

$$\min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{A}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sqrt{|\nabla \mathbf{f}_{i,j}|^2 + \varepsilon}$$

dove  $\varepsilon$  è una costante positiva piccola.

## Calcolo del prodotto di covoluzione con Condizioni al bordo periodiche

Imponendo **condizioni al bordo periodiche**:

$$K_5 = K_1, \quad K_4 = K_0, \quad K_{-1} = K_3$$

dunque:

$$A = \begin{pmatrix} K_2 & K_1 & K_0 & K_3 \\ K_3 & K_2 & K_1 & K_0 \\ K_0 & K_3 & K_2 & K_1 \\ K_1 & K_0 & K_3 & K_2 \end{pmatrix}$$

**A** è una **matrice ciclica**

## Calcolo del prodotto di covoluzione con Condizioni al bordo periodiche

- ▶ Le matrici circolanti sono diagonalizzabili tramite la matrice di Fourier:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}$$

- ▶ La prima colonna di  $\mathbf{F}$  è il vettore con componenti tutte uguali a 1; dunque

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F} \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{F} \mathbf{a}_1 = \mathbf{\Lambda} \mathbf{f}_1 = \lambda$$

- ▶ Gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono ottenuti facendo la trasformata di Fourier della prima colonna di  $\mathbf{A}$  che è ottenuta facendo lo shift del vettore

$$\begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

- ▶ I prodotti matrice-vettore quando  $\mathbf{A}$  è circolante possono essere fatti efficientemente nello spazio di Fourier; infatti:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \mathbf{F}^* \Lambda \mathbf{Fx}$$

- ▶ Cioè:

$$\mathbf{y} = \text{ifft}(\boldsymbol{\lambda} * \text{fft}(\mathbf{x}))$$

dove

$$\boldsymbol{\lambda} = \text{fft}(\mathbf{a}_1) = \text{fft}(\text{fftshift}(K_0 \dots K_{N-1}))$$

- ▶ E' poi necessaria l'istruzione  $\mathbf{y} = \text{real}(\mathbf{y})$  perchè  $\text{fft}$  e  $\text{ifft}$  implicano calcoli con numeri complessi. Poichè  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{x}$  sono reali anche  $\mathbf{y}$ , in aritmetica esatta, è reale. Tuttavia, a causa degli errori di arrotondamento il vettore  $\mathbf{y}$  calcolato contiene numeri con una piccola parte complessa che è rimossa con l'istruzione  $\text{real}$

Imponendo le condizioni al bordo periodiche, il prodotto di convoluzione viene calcolato nel modo seguente:

- ▶ Si calcolano  $\hat{\mathbf{K}} = \text{fft2}(\text{fftshif}(\mathbf{K}))$  e  $\hat{\mathbf{f}} = \text{fft2}(\mathbf{f})$
- ▶ Si calcola il prodotto fra  $\hat{\mathbf{K}}$  e  $\hat{\mathbf{f}}$  nello spazio di Fourier:  $\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{f}}$
- ▶ Si torna nello spazio dell'immagine facendo la trasformata inversa del prodotto ottenuto:  $\mathbf{g} = \text{real}(\text{ifft2}(\hat{\mathbf{g}}))$

## Invertire una matrice nello spazio di Fourier

- ▶ Supponiamo di voler risolvere il sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{g}$  (supponiamo che esista  $\mathbf{A}^{-1}$ )

- ▶ Vale

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{F}$$

- ▶ Dunque

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{F}^* \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{g}$$

- ▶ Quindi  $\mathbf{x}$  può essere calcolata con le istruzioni

$$\mathbf{x} = \text{real}\left(\text{ifft}(\text{fft}(\mathbf{g}) ./ \mathbf{S})\right)$$

dove

$$\mathbf{S} = \text{fft}(\text{fftshift}(\mathbf{K}))$$

- ▶ Poichè  $\mathbf{A}$  è mal condizionata, la soluzione diretta  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}$  non è una approssimazione accettabile della soluzione esatta

## Problema test

Un problema test è costituito dai seguenti dati:

- ▶  $f_{\text{exact}}$  oggetto esatto da ricostruire;
- ▶  $g$  immagine con rumore e blur;
- ▶  $K$  immagine della PSF.

Nei problemi reali  $f_{\text{exact}}$  non è noto e sono dati  $g$  e  $K$

## Costruire un problema test

- ▶ leggere  $f_{\text{exact}}$  da un file;
- ▶ calcolare la psf  $K$  ;
- ▶ calcolare l'immagine sfuocata  $g_{\text{blur}}$  facendo la convoluzione tra  $K$  e  $f_{\text{exact}}$ :

$$g_{\text{blur}} = K * f_{\text{exact}};$$

- ▶ creare l'array rumore  $w$ ;
- ▶ aggiungere il rumore  $w$  a  $g_{\text{blur}}$ :

$$g_{\text{blur+noise}} = g_{\text{blur}} + w$$

- ▶  $g := g_{\text{blur+noise}}$

$PSNR = 20 \log_{10} \frac{\max_{ij} g(i,j)}{\frac{1}{M*N} \|w\|}$  (dB) dove  $M * N$  è il numero di pixels dell'immagine.