

---

---

# Risoluzione di equazioni non lineari

## Calcolo Numerico

Elena Loli Piccolomini

## Obiettivo

$$F: [a, b] \subset \mathbb{R} \xrightarrow{v} \mathbb{R}$$

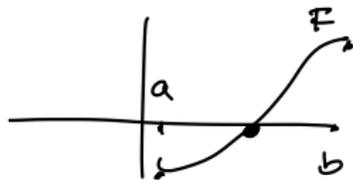
- Calcolare con metodi numerici la soluzione di un'equazione non lineare

$$F(x) = 0$$

## Caso unidimensionale

1) Esiste (è unica) la soluzione?

$$f(x) = 0$$



$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- ▶ **Esistenza di uno zero di  $f$ .**

Se  $f$  è una funzione **continua** in  $[a, b]$  e tale che  $f(a)f(b) < 0$ , allora esiste **almeno** uno zero di  $f$  in  $(a, b)$ .

- ▶ Individuazione di un intervallo in cui esiste un solo zero di  $f$ . )

## Metodi iterativi

- ▶ Non è possibile in generale costruire metodi numerici che calcolino le radici di un'equazione non lineare in un numero finito di passi.
- ▶ I metodi per questo tipo di problema sono **metodi iterativi**.
- ▶ A partire da uno o più dati iniziali, calcolano dei valori  $x_k$  attraverso un procedimento che si ripete (itera) sempre uguale ad ogni passo  $k$ :

$$x_k = G(x_{k-1}) \quad \in \mathcal{R}$$

- ▶ Sotto opportune condizioni gli iterati  $x_k$  convergono alla soluzione  $x^*$  (tale che  $f(x^*) = 0$ ) per  $k \rightarrow \infty$ .

## Metodi iterativi

Schema algoritmo iterativo:

1. Dati:  $x_0$
2.  $k=1$
3. Ripeti finchè convergenza
  - 3.1  $x_k = G(x_{k-1})$
  - 3.2  $k = k + 1$

end

Sono da specificare nel singolo metodo le condizioni di convergenza che comunque contengono sempre la seguente:

$$k \leq \text{maxit}$$

$$x_0, x_1, x_2 \dots x_k, x_{k+1} \dots$$

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^*$$

↑

## Metodi iterativi

$$e_{k+1} = C e_k^p$$

### Convergenza metodi iterativi.

Si dice che la successione  $x_k$  generata da un metodo iterativo converge ad  $x^*$  con ordine  $p \geq 1$  se:

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = C, \forall k \geq k_0$$

dove  $k_0$  è un intero opportuno e  $C \in \mathbb{R}$  tale che:

$$\begin{cases} 0 < C \leq 1 & \text{se } p = 1 \\ C > 0 & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

In tal caso si dirà che il **metodo è di ordine  $p$** .

**Osservazione.** nel caso  $p = 1$  per avere convergenza deve essere  $C < 1$ . In questo caso  $C$  prende il nome di *fattore di convergenza*.

## Metodi iterativi

In generale la convergenza di un metodo iterativo per la risoluzione di un'equazione non lineare dipende dalla scelta del valore iniziale  $x_0$ .  
Esisteranno quindi risultati di **convergenza globale** quando il metodo converge per *ogni* scelta di  $x_0$  e teoremi di **convergenza locale** quando il metodo converge solo se  $x_0$  è scelto in un *opportuno intorno della radice esatta*.

Condizionamento  
(Posizione del problema)

$$x^* \quad f(x^*) = 0, \quad x_\epsilon^* : f_\epsilon(x_\epsilon^*) = 0$$

$f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon h(x)$ ,  $\epsilon$  piccolo,  $x_\epsilon^*$  zero semplice di  $f_\epsilon(x)$ . Sviluppando in serie di Taylor di punto iniziale  $x^*$ :

$$\begin{aligned} 0 &= f_\epsilon(x_\epsilon^*) = f_\epsilon(x^*) + f'_\epsilon(x^*)(x_\epsilon^* - x^*) + \frac{1}{2} f''_\epsilon(\xi)(x_\epsilon^* - x^*)^2 \\ &= f(x^*) + \epsilon h(x^*) - f'(x^*)(x^* - x_\epsilon^*) - \epsilon h'(x^*)(x^* - x_\epsilon^*) + \\ &\quad \frac{1}{2} f''(\xi)(x_\epsilon^* - x^*)^2 + \frac{1}{2} \epsilon h''(\xi)(x_\epsilon^* - x^*)^2 \end{aligned}$$

$\xi \in (x^*, x_\epsilon^*)$ . Tralasciando perturbazioni del II ordine:

$$0 \simeq \epsilon h(x^*) - f'(x^*)(x^* - x_\epsilon^*) \Rightarrow$$

$$|x_\epsilon^* - x^*| \leq \frac{\epsilon h(x^*)}{|f'(x^*)|}$$

error output

errore input  
 $\frac{1}{f'(x^*)}$

## Posizione del problema

La perturbazione sul risultato è pari a quella del dato amplificata di un fattore

$$\frac{1}{|f'(x^*)|}$$

, che è detto **numero di condizione del problema**.

Se il numero di condizione è grande il problema è **mal condizionato** se è piccolo il problema è **ben condizionato**.

Se  $x^*$  è zero di molteplicità  $m$  si dimostra che:

$$|x_c^* - x^*| \leq \left| \frac{m! \epsilon h(x^*)}{f^m(x^*)} \right|^{1/m}$$

~~quindi il problema è sempre mal condizionato, perché  $\epsilon^{1/m}$  può essere grande~~

/

## Posizione del problema. Esempi

Polinomio di Wilkinson(Wilkinson, [1959]) (esempio da Quarteroni)

$$P_{10}(x) = (x + 1)(x + 2) \dots (x + 10) = x^{10} + 55x^9 + \dots + 10!$$

Sia:  $\tilde{P}_{10}(x) = P_{10} + \epsilon x^9$ , con  $\epsilon = 2^{-23} \simeq 1.2 \cdot 10^{-7}$ . Secondo le stime precedenti, il massimo errore  $|x_{\epsilon}^{*(i)} - x^{*(i)}|$  si ha in corrispondenza di  $i = 8$ ,  $|x_{\epsilon}^* - x_i^*| \leq 1.9843 \cdot 10^{-4}$ . L'errore effettivo in corrispondenza di  $i = 8$  è  $1.98767 \cdot 10^{-4}$ , quindi il problema è mal condizionato.

## Posizione del problema. Esempi

Radici multiple. (da Quarteroni)

$$P_4(x) = (x - 1)^7$$

ha radici coincidenti  $x^{*(i)} = 1$ .

$$\tilde{P}_4(x) = (x - 1)^7 - \epsilon, \quad \epsilon \ll 1$$

ha radici semplici  $\alpha_i = 1 + \sqrt[7]{\epsilon}$ . Quindi  $|x_\epsilon^{*(i)} - x^{*(i)}| = \sqrt[7]{\epsilon}$ . Se  $\epsilon = 10^{-7}$  allora l'errore

$$|x_\epsilon^{*(i)} - x^{*(i)}| = (10^{-7})^{1/7} = 1,$$

quindi il problema è mal condizionato.

## Metodo di bisezione

$$F(\gamma) = 0$$

Si costruisce una successione di intervalli ( $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$ ):

$$I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots, I_k = [a_k, b_k]$$

tali che:

$$I_k \subset I_{k-1} \subset \dots \subset I_1$$

con  $f(a_k)f(b_k) < 0, k = 1, 2, \dots$  ( $a_1 = a, b_1 = b$ ). Al passo  $k$  si calcola

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

e il valore  $f(c_k)$ . Se  $f(c_k) = 0, c_k = x^*$ , altrimenti:

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k], & \text{se } f(c_k) > 0 \\ [c_k, b_k], & \text{se } f(c_k) < 0. \end{cases}$$



# Metodo di bisezione

Esempio. Si vuole risolvere  $x^2 - 78.8 = 0$  in  $[6, 12]$ .  $f(x) = x^2 - 78.8$

$$f(6) = 36 - 78.8 < 0$$

$$f(12) = 144 - 78.8 > 0$$

$$a = 6$$

$$b = 12$$

$k$	$a_k$	$I_k$	$b_k$	$c_k$	$f(c_k)$
1	6		12	9	2.2
2	6		9	7.5	-22.55
3	7.5		9	8.25	-10.7375
4	8.25		9	8.625	-4.409375
5	8.625		9	8.8125	-1.139844
6	8.8125		9	8.90625	0.5212891
7	8.8125	8.90625	8.859375	8.859375	-0.3114746
8	8.859375	8.90625	<u>8.882813</u>	<u>8.882813</u>	0.1043579

8.882813 è una approssimazione della soluzione  $\sqrt{78.8} \approx$

→ 8.876936408 tale che

$$b - a = 6$$

$$\rightarrow |8.882813 - x^*| \leq \frac{1}{2^8} 6 = 0.0234$$

L'errore assoluto è 0.00587... Occorrono 10 valutazioni di funzione.

## Metodo di bisezione

Osservazioni:

- ▶  $c = a + \frac{b-a}{2}$  altrimenti  $c_{k+1}$  può cadere esterno all'intervallo  $[a_k, b_k]$ .  
esempio:  $a = 0.983, b = 0.986, \mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$ .
- ▶  $f(a)f(b)$  può non essere rappresentabile sulla macchina. per verificare il segno conviene quindi usare la funzione *sign*:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

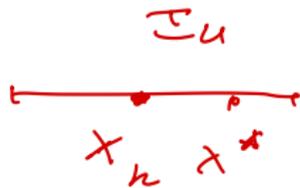
## Metodo di bisezione

- ▶ L'algoritmo in aritmetica finita può non avere fine.  
esempio:  $a_k = 98.5$ ,  $b_k = 98.6$ ,  $\epsilon = 0.004$  in  $\mathbb{F}(10, 3, -5, 5)$ . Infatti  $c_k = 98.55$ , ma  $fl(c_k) = 0.985 \cdot 10^2$ , quindi si genera una successione di iterati costanti.  
Test modificato:

$$|b_k - a_k| < \epsilon + eps \cdot \max(|b|, |a|) \quad \& \quad iter < itmax$$

dove  $eps$  è la precisione di macchina.

## Convergenza metodo di bisezione



Al passo  $k$ ,

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2} (b_k - a_k) = \frac{1}{2^2} (b_{k-1} - a_{k-1}) = \dots = \frac{1}{2^k} (b_1 - a_1)$$

quindi  $x^* = c_{k+1} \pm \epsilon_{k+1}$ , dove

*↓*  
*punto medio*

$$\epsilon_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}} (b - a).$$

Viceversa, fissato  $\epsilon$  tale che  $\epsilon = \frac{1}{2^{k+1}} (b - a)$ , il numero  $c_{k+1}$  è una approssimazione di  $x^*$  entro una tolleranza  $\epsilon$ .

$$e_{k+1} = e_k \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} p &= 1 \\ c &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## Convergenza metodo di bisezione

Quindi per  $k \rightarrow \infty$ ,  $\{c_k\} \rightarrow x^*$  con velocità di convergenza pari a quella della successione  $\{\frac{1}{2^k}\}$ .

Il metodo fornisce inoltre una maggiorazione dell'errore, cioè fissata una tolleranza  $\delta$  è possibile determinare il numero minimo di iterazioni  $k$  per ottenere un errore minore di  $\delta$ . Infatti  $k$  è tale che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^k}(b-a) < \delta &\Rightarrow 2^k \geq \frac{b-a}{\delta} \Rightarrow \\ k &\geq \log_2 \frac{b-a}{\delta} \end{aligned}$$

**Complessità computazionale del metodo:** ad ogni iterazione occorrono 2 valutazioni di funzione.

## Il metodo delle approssimazioni successive

(punto fisso)

Il problema di determinare lo zero di una funzione in genere non si risolve in un numero finito di passi. Si deve generare un **procedimento iterativo**.

- ▶ determinare una approssimazione iniziale alla soluzione  $x^*$  di  $f(x) = 0$
- ▶ Determinare una relazione funzionale a partire da  $f(x)$
- ▶ a partire da  $x_0$ , generare una successione di iterati  $x_k$  fino ad ottenere la precisione desiderata per l'approssimazione del risultato.

## Il metodo delle approssimazioni successive $x_0, x_1, x_2, \dots$

Il problema di cercare una radice di

$$f(x) = 0$$

è connesso al problem di cercare una soluzione dell'equazione

$$x = g(x)$$

*problema*

cioè un punto fisso della funzione  $g(x)$ .

$$g(x) = x - f(x)\Phi(x)$$

## Il metodo delle approssimazioni successive

Se  $f(x)$  si annulla in  $[a, b]$  e  $\Phi(x)$  è una funzione tale che:

$$0 < |\Phi(x)| < \infty, \quad x \in [a, b]$$

allora è equivalente risolvere una delle due equazioni:

$$\rightarrow f(x) = 0 \quad g(x) = x.$$

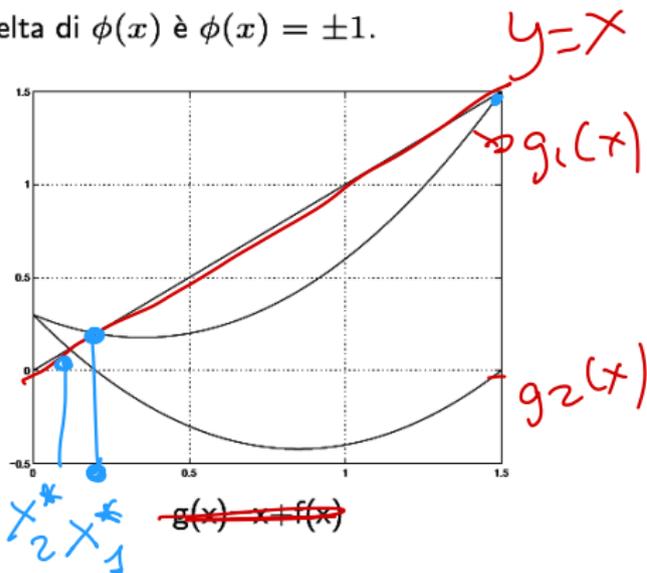
Quindi si riporta il problema di calcolare lo zero di una funzione  $f(x)$  al problema di calcolare il punto fisso di una funzione  $g(x)$ .  
Geometricamente è l'intersezione delle due curve:

$$\underline{y = x} \quad \underline{y = g(x)}$$

$$x = g(x)$$

## Il metodo delle approssimazioni successive

Una possibile scelta di  $\phi(x)$  è  $\phi(x) = \pm 1$ .



## Il metodo delle approssimazioni successive

*Teorema di esistenza e unicità del punto fisso nel modello continuo.*

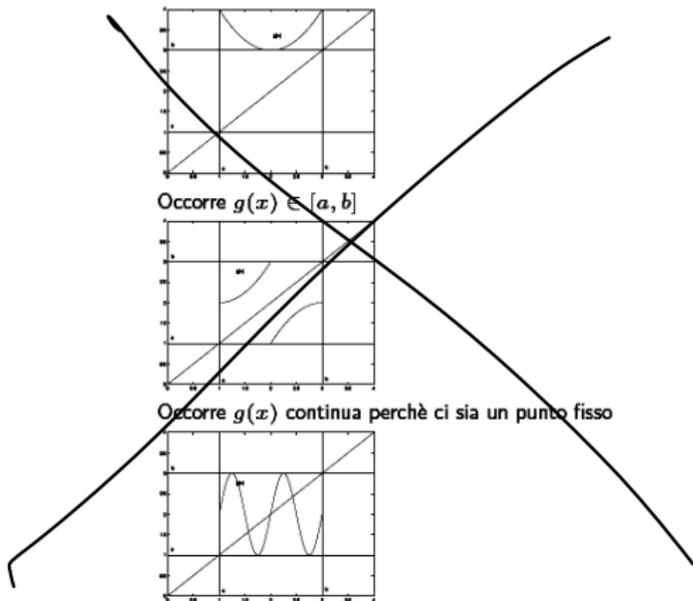
Sia  $g(x)$  continua in  $[a, b]$  e tale che  $g(x) \in [a, b]$ . Sia  $L$  una costante  $0 \leq L < 1$  tale che, per ogni  $x, y \in [a, b]$  si ha:

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

ossia  $g$  è una contrazione in  $[a, b]$ . Allora esiste un unico punto fisso  $x^*$  di  $g(x)$  in  $[a, b]$ . Dimostrazione in aula

**Osservazione.** Se  $g(x)$  è derivabile in  $[a, b]$  con  $|g'(x)| \leq L < 1$  per  $x \in [a, b]$ , allora  $g(x)$  è una contrazione. Il viceversa non è vero perchè  $g(x)$  può non essere differenziabile.

## Il metodo delle approssimazioni successive



Occorre  $g(x) \in [a, b]$

Occorre  $g(x)$  continua perchè ci sia un punto fisso

Occorre che  $g(x)$  non oscilli troppo, ossia che sia una contrazione, perchè ci sia un unico punto fisso.

centerline

$$f(x) = 0 \quad (2)$$
$$(2) x = g(x) =$$
$$\frac{x - f(x)\phi(x)}{1 - \phi(x)}$$

## Il metodo delle approssimazioni successive

*$x_0$  assegnato*

Data una approssimazione iniziale  $x_0$  di  $x^*$ , punto fisso di  $g(x)$  in  $[a, b]$  si genera una successione di iterati mediante il metodo delle approssimazioni successive o del punto fisso o iterazione funzionale:

$$\rightarrow \boxed{x_{k+1} = g(x_k)} \leftarrow$$

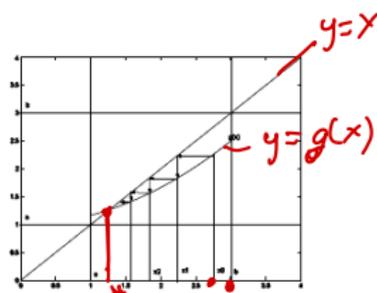
**Convergenza del metodo allo zero della funzione.**

Se  $g(x)$  è continua e la successione  $\{x_k\}$  converge per  $k \rightarrow \infty$  a un punto  $x^*$ , allora  $x^*$  è punto fisso di  $g(x)$ . Infatti:

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = g(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = g(x^*)$$

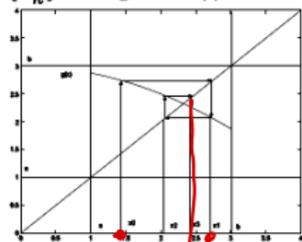
Geometricamente, il metodo dell'iterazione funzionale equivale alla costruzione di una poligonale orientata con lati orizzontali e verticali nel piano  $xy$ .

# Il metodo delle approssimazioni successive



Convergenza monotona:  $x_1 < x_0$

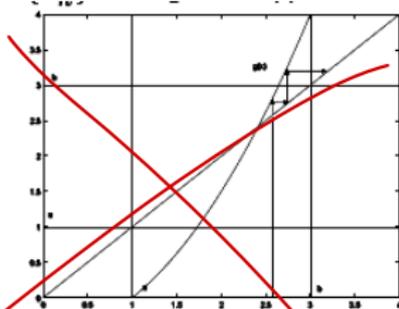
$\{x_k\}$  converge a  $x^*$  approssimando sempre per eccesso o per difetto.



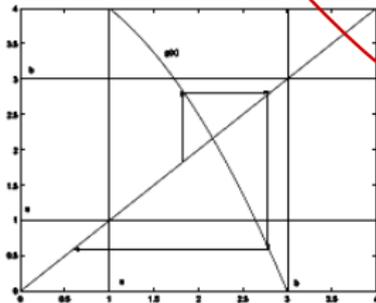
Convergenza alternata:  $x_1 > x_0$

$\{x_k\}$  converge a  $x^*$  approssimando per eccesso e per difetto.

## Il metodo delle approssimazioni successive



$$g'(x) > 1$$



$$g'(x) < -1$$

Per  $|g'(x)| > 1$  non c'è convergenza.

## Il metodo delle approssimazioni successive

Teorema di convergenza globale del metodo delle approssimazioni successive.  
Sia  $g(x)$  una funzione definita in  $[a, b]$ . Sia:

- ▶  $g(x)$  continua in  $[a, b]$ ,
- ▶  $g(x) \in [a, b]$
- ▶  $g(x)$  una contrazione in  $[a, b]$

Allora per ogni  $x_0 \in [a, b]$  la successione degli iterati  $\{x_k\}$  con  $x_k = g(x_{k-1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$  converge per  $k \rightarrow \infty$  all'unico punto fisso  $x^*$  di  $g(x)$  in  $[a, b]$ . Inoltre vale:

$$|x_k - x^*| \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|$$

## Il metodo delle approssimazioni successive

Esempio.

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0, \quad x \in [1, 2]$$

si considera  $x_0 = 1.5$ .

*→ più iniziale*

$$\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$$

$$\phi(x) = 1$$

1.  $x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = g_1(x)$
2.  $x = \left(\frac{1}{x} - 4x\right)^{1/2} = g_2(x)$  (da  $x^3 = 10 - 4x^2$ )
3.  $x = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2} = g_3(x)$  (da  $x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$ )
4.  $x = \left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2} = g_4(x)$  (da  $x^3 + 4x^2 = 10$ )
5.  $xx - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = g_5(x)$  (da  $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ).

## Il metodo delle approssimazioni successive

	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$ <sup>Newton</sup>
$k$	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	-469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	$1.08 \cdot 10^8$	impossibile	1.375170253	1.365264748	1.365230013
...	diverge		...	...	
15			1.365223680	1.365230013	
...					
30			1.365230013		

Non tutte le scelte portano ad un metodo convergente (caso 1) o ben definito (caso 2). Inoltre la velocità di convergenza del metodo è diversa nei vari casi (con il metodo di bisezione per avere la stessa precisione sono necessarie 27 valutazioni di funzione)

## Teorema di convergenza locale

Teorema Sia  $x^*$  un punto fisso di  $g(x)$ ; si suppone che  $g(x)$  sia continua e sia una contrazione per ogni  $x \in [x^* - \rho, x^* + \rho] = I_\rho$ .

Allora, per ogni  $x_0 \in I_\rho$ , la successione degli  $\{x_k\}$  è ben definita, ossia  $x_k \in I_\rho$  e converge per  $k \rightarrow \infty$  a  $x^*$ .

Inoltre,  $x^*$  è l'unico punto fisso di  $g(x)$  in  $I_\rho$ .

## Propagazione degli errori

Poichè si opera coi numeri finiti, è impossibile calcolare esattamente la funzione  $g(x)$  per  $x$  assegnato. Piuttosto, si calcola una approssimazione di  $g(x)$  data da

$$a(x) = g(x) + \delta(x)$$

ove  $\delta(x)$  è l'errore commesso. Di solito è nota una maggiorazione dell'errore:

$$|\delta(x)| \leq \delta.$$

Operando in aritmetica finita, il metodo delle approssimazioni successive diventa:

$$w_{k+1} = a(w_k) = g(w_k) + \delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ove  $w_k$  è il  $k$ -esimo iterato ottenuto operando coi numeri finiti e  $|\delta_k| \leq \delta$ .

In generale, la successione dei  $w_k$  non converge. Tuttavia, sotto opportune condizioni, è possibile determinare una approssimazione di  $x^*$  tanto piú accurata tanto piú  $\delta$  è piccolo.

**Teorema** Sia  $x^*$  un punto fisso di  $g(x)$ . Supponiamo che, in un intervallo  $I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$ ,  $g(x)$  sia continua e contrattiva. Allora, per ogni  $w_0 \in I_{\rho_0} = [x^* - \rho_0, x^* + \rho_0]$  con  $\rho_0 = \rho - \frac{\delta}{1-L}$ , con  $\delta \geq |\delta_k|$ , la successione dei  $w_k$  è tale che:

$$|w_k - w^*| \leq \frac{\delta}{1-L} + L^k \left( \rho_0 - \frac{\delta}{1-L} \right) \quad \text{e} \quad w_k \in I_\rho.$$

Il primo termine può essere grande se  $L$  è prossimo a 1; il secondo termine tende a 0 per  $k \rightarrow \infty$ . Pertanto, non si ha piú convergenza della successione degli iterati a  $x^*$ .

## Osservazione

Si osservi che:

$$\begin{aligned} |w_{k+1} - w_k| &= |w_{k+1} - x^* + x^* - w_k| \\ &\leq |w_{k+1} - x^*| + |x^* - w_k| \\ &\leq \frac{\delta}{1-L} + L^k \left( \rho_0 - \frac{\delta}{1-L} \right) + \frac{\delta}{1-L} + L^{k+1} \left( \rho_0 - \frac{\delta}{1-L} \right) \\ &= \frac{2\delta}{1-L} + L^k (L+1) \left( \rho_0 - \frac{\delta}{1-L} \right) \end{aligned}$$

Per quanto  $k$  sia preso grande, la differenza tra due iterati successivi non può essere più piccola di  $\frac{2\delta}{1-L}$  a causa degli errori di arrotondamento nel calcolo di  $g(x)$ .

## Criteri di arresto

$$x_k = g(x_k) \rightarrow \boxed{f(x_k) = 0}$$

Occorre determinare un criterio per vedere se l'approssimazione ottenuta è un punto fisso di  $g(x)$  ossia se  $x - g(x) = \phi(x)f(x) = 0$ .

Si ritiene che  $x_k$  sia una approssimazione accettabile se contemporaneamente:

$$\boxed{\begin{array}{|l} |f(x_k)| \leq \epsilon_1 \quad \text{e} \quad |x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon_2 \\ \text{(1)} \qquad \qquad \qquad \text{(2)} \end{array}}$$

CRITERI  
ERRORE  
ASSOLUTO

oppure

$$\rightarrow \frac{|f(x_k)|}{f_{\max}} \leq \sigma_1 \quad \text{e} \quad \frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} \leq \sigma_2$$

CRITERI  
ERRORE  
RELATIVO

dove  $\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1, \sigma_2$  sono tolleranze assegnate e  $f_{\max} = \max_{x \in I_\rho} |f(x)|$

Inoltre deve essere  $\epsilon_2 \geq \frac{\epsilon_1}{1-L}$ , poichè questo termine che tiene conto degli errori di arrotondamento non converge a 0 per  $k \rightarrow \infty$ .

$x_k - x_{k-1}$  può convergere a 0, pur essendo le due successioni divergenti. Se non si conosce nulla di  $f(x)$  conviene applicare i test relativi.

## Ordine di convergenza

Definizione Sia  $x^*$  un punto fisso di  $g(x)$ . Se per ogni  $x_0 \in I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$ , la successione generata con l'iterazione funzionale è tale che esistono una costante positiva  $C$  e un positivo  $p$  tale che

$$|x_k - x^*| \leq C|x_{k-1} - x^*|^p, \quad k \geq 1$$

con  $C > 0$  per  $p > 1$  e  $0 < C < 1$  per  $p = 1$ , allora il metodo iterativo è di ordine  $p$ .

Se  $p = 1$ , il metodo si dice lineare; se  $p = 2$ , ha velocità di convergenza quadratica.

$C$  si dice *costante asintotica d'errore*.

Vale:

$$e_{k+1} = |x_{k+1} - x^*| \approx C|x_k - x^*|^p = Ce_k^p,$$

o anche

$$e_{k+1} = (C + \delta_k)e_k^p \quad \text{con} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0.$$

## Velocità convergenza

### CONVERGENZA LOCALE

- ▶ Se  $x^*$  è un punto fisso di  $g(x)$  e  $g \in C^1$ , con  $g'(x^*) \neq 0$  e  $|g'(x^*)| < 1$ , allora esiste un intorno  $I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$  per cui  $|g'(x)| < 1$  per  $x \in I_\rho$ . Nell'intervallo  $I_\rho$ , per ogni  $x_0 \in I_\rho$  il metodo iterativo converge al punto fisso in modo lineare.

$$\rho = 1$$

$$e_{k+1} = c e_k \rightarrow c = |g'(x^*)|$$

- Se  $x^*$  è un punto fisso di  $g(x)$  e  $g \in C^2$ , con  $g'(x^*) = 0$  e  $g''(x^*) \neq 0$ , allora esiste un intorno  $I_\rho = [x^* - \rho, x^* + \rho]$  tale che per ogni  $x_0 \in I_\rho$  il metodo iterativo converge al punto fisso con velocità di convergenza quadratica e vale

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{|g''(x^*)|}{2}$$

o equivalentemente

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{|g''(\xi^*)|}{2} |x_k - x^*|^2 \quad \text{con } \xi_k \in I_\rho$$

## Metodo di Newton

metodo di punto  
fisso con una scelta particolare  
di  $\phi$

- ▶ Data l'equazione  $f(x) = 0$ , si può determinare la soluzione  $x^*$  come punto fisso di

$$x = x - \phi(x)f(x) = g(x)$$

con  $\phi(x) \neq 0$  per ogni  $x$  nell'intervallo in cui si cerca la soluzione.

- ▶ *Velocità di convergenza*

Vale  $g'(x) = 1 - \phi(x)f'(x) - \phi'(x)f(x)$  e  $g'(x^*) = 1 - \phi(x^*)f'(x^*)$ .

Il metodo iterativo ha velocità di convergenza lineare se

$$\phi(x^*) \neq \frac{1}{f'(x^*)}, \text{ supposto } f'(x^*) \neq 0.$$

Se  $\phi(x)$  è costante,  $\phi(x) = m \neq \frac{1}{f'(x^*)}$ , il metodo è lineare.

La convergenza è quadratica se

$$\phi(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)} \quad \text{con} \quad f'(x^*) \neq 0.$$

Allora o si pone  $\phi(x) = \frac{1}{f'(x^*)}$  costante (ma  $x^*$  è incognito), oppure si pone

$$\phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

ottenendo un metodo a convergenza quadratica dato da

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Il metodo è detto metodo di Newton.

metodo di  
Newton

Vale:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x^*)^2 - f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = 0$$

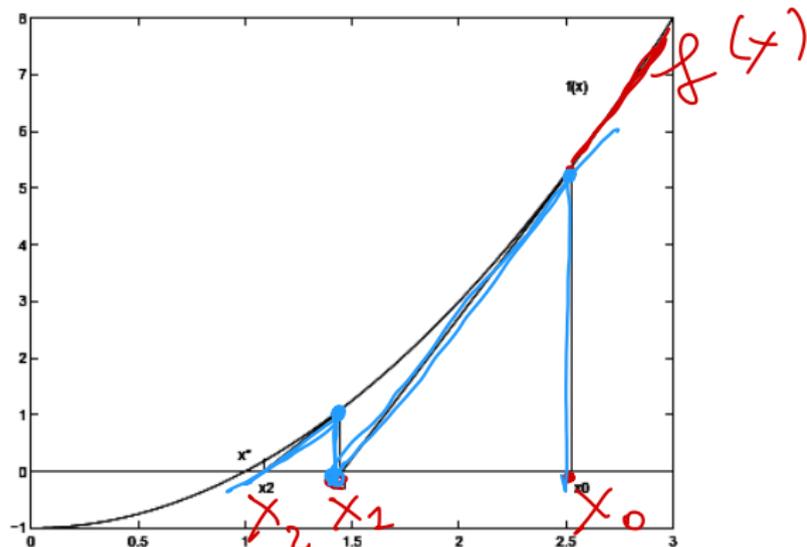
$$g''(x) = \frac{(f'(x^*)f''(x^*) + f(x^*)f'''(x^*))f'(x^*)^2 - 2f(x^*)f''(x^*)^2f'(x^*)}{f'(x^*)^4} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

Allora, se  $f(x^*) = 0$ ,  $f'(x^*) \neq 0$ ,  $f''(x^*) \neq 0$ , il metodo di Newton ha convergenza quadratica con costante asintotica di convergenza  $\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$ .

E' detto anche *metodo delle tangenti* perchè geometricamente il punto  $x_{k+1}$  è il punto d'intersezione tra  $y = 0$  e la retta tangente a  $f(x)$  in  $(x_k, f(x_k))$ :

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

# Convergenza locale del metodo di Newton Metodo delle tangenti



$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

## Convergenza locale del metodo di Newton

Sia  $x^*$  uno zero di  $f(x)$ . Sia  $f(x)$  continua insieme alle sue derivate prima, seconda e terza (continuità di  $g, g', g''$ ).

Sia  $f'(x) \neq 0$  per  $x$  in un opportuno intorno di  $x^*$  e sia  $f''(x^*) \neq 0$  ( $f(x)/f'(x)$  deve essere definita e deve essere  $g''(x) \neq 0$ ).

Allora, per ogni  $x_0 \in I_\rho$ , la successione generata dal metodo di Newton converge a  $x^*$  in modo quadratico.

## Convergenza globale del metodo di Newton

$$f(x) = 3x^2 - 1 \quad [a, b] = [-1, 1]$$

Teorema Sia  $f \in C^2[a, b]$ . Sia inoltre:

- ▶  $f(a) < 0, f(b) > 0$ ;
- ▶  $f'(x) \neq 0$ ;
- ▶  $f''(x) \leq 0$ ;
- ▶  $|f(b)| \leq (b - a)|f'(b)|$ .

GRUPPO A

Allora il metodo di Newton genera una successione di iterati convergenti all'unica ~~soluzione~~ di  $f(x) = 0$  appartenente ad  $[a, b]$  a partire da qualunque  $x_0 \in [a, b]$ .

CONVERGENZA GLOBALE

Il teorema resta valido se valgono le seguenti condizioni:

- ▶  $f(a) < 0, f(b) > 0$ ;
- ▶  $f'(x) \neq 0$ ;
- ▶  $f''(x) \geq 0$ ;
- ▶  $|f(a)| \leq (b - a)|f'(a)|$ .

GRUPPO B

oppure

- ▶  $f(a) > 0, f(b) < 0$ ;
- ▶  $f'(x) \neq 0$ ;
- ▶  $f''(x) \geq 0$ ;
- ▶  $|f(b)| \leq (b - a)|f'(b)|$ .

GRUPPO C

oppure

- ▶  $f(a) > 0, f(b) < 0;$
- ▶  $f'(x) \neq 0;$
- ▶  $f''(x) \leq 0;$
- ▶  $|f(a)| \leq (b - a)|f'(a)|.$

GRW PPO D

## Esempio 1

$$\sin(x) - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \text{ in } [1, 2].$$

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{x}{2}; \quad f''(x) = -\sin(x) - \frac{1}{2}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin(x_k) - \left(\frac{x_k}{2}\right)^2}{\cos(x_k) - \frac{x_k}{2}}$$

$$\text{costante asintotica d'errore } \frac{g''(x^*)}{2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \simeq 0.54$$

$k$	$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$-f(x_k)/f'(x_k)$
0	1.5	0.434995	-0.67926	0.64039
1	2.14039	-0.303197	-1.60948	-0.18838
2	1.95201	-0.024372	-1.34805	-0.01808
3	1.93393	-0.000233	-1.32217	-0.00018
4	1.93375	0.000005		

## Esempio 2

$$x^2 - \gamma = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - \gamma}{2x_k} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{\gamma}{x_k} \right)$$

Per  $\gamma = 2$  e  $[1, 2]$  si ha:

<b><math>k</math></b>	<b><math>x_k</math></b>
<b>0</b>	<b>1.5</b>
<b>1</b>	<b>1.41666666</b>
<b>2</b>	<b>1.41421568</b>
<b>3</b>	<b>1.414213561</b>
<b>4</b>	<b>1.414213562</b>

costante asintotica d'errore  $\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$ ; se  $\gamma$  è piccolo, la convergenza può essere lenta.

## Considerazioni algoritmiche

I criteri di arresto del metodo di Newton sono gli stessi del metodo delle approssimazioni successive.

La **complessità computazionale** del metodo di Newton è pari ad una valutazione della funzione e una valutazione della derivata prima per passo.

Se la complessità di  $f'$  è analoga a quella di  $f$ , si dice che il metodo richiede due valutazioni di funzioni per passo.