Metodi Numerici

- Metodi Diretti: la soluzione viene calcolata in un numero finito di passi modificando la matrice del problema in modo da rendere piú agevole il calcolo della soluzione.
  - Matrici triangolari: Metodi di Sostituzione;
  - Metodo di Eliminazione di Gauss;
  - Matrici simmetriche: Metodo di Cholesky;
- Metodi Iterativi: Calcolo di una soluzione come limite di una successione di approssimazioni $\mathbf{x}_k$, senza modificare la struttura della matrice $\mathbf{A}$. Adatti per sistemi di grandi dimensioni con matrici **sparse** (pochi elementi non nulli).

Sistema Triangolare Superiore $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\
 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\
 & & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & a_{n,n}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

$$a_{n,n}x_n = b_n$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \;\Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \;\Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \;\Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

$$a_{n,n}x_n = b_n \;\Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n,n}x_n = b_{n-1} \;\Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$a_{n-2,n-2}x_{n-2} + a_{n-2,n-1}x_{n-1} + a_{n-2,n}x_n = b_{n-2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

$$x_{n-3} = \frac{b_{n-3} - \sum_{j=n-2}^{n} a_{n-3,j}x_j}{a_{n-3,n-3}}$$

Riassumendo:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = n-1, \ldots, 1$$

Riassumendo:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = n-1, \ldots, 1$$

```
function x = UTriSol(U, b)
% Solves the nonsingular upper triangular system Ux = b.
% where U is n-by-n, b is n-by-1, and X is n-by-1.
n = length(b); x = zeros(n, 1);
for j = n : -1 : 2
  x(j) = b(j)/U(j, j);
  b(1 : j - 1) = b(1 : j - 1) - x(j) * U(1 : j - 1, j);
end
x(1) = b(1)/U(1, 1);
```

Complessità computazionale $\mathcal{O}(n^2/2)$

Sistema Triangolare Inferiore $\mathbf{Ax = b}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \; \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \ \Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \;\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1}{a_{2,2}}$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \;\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1}{a_{2,2}}$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \;\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1}{a_{2,2}}$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1 - a_{3,2}x_2}{a_{3,3}}$$

$$a_{1,1}x_1 = b_1 \;\Rightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}}$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \;\Rightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{2,1}x_1}{a_{2,2}}$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{3,1}x_1 - a_{3,2}x_2}{a_{3,3}}$$

$$x_4 = \frac{b_4 - \sum_{j=1}^{3} a_{4,j}x_j}{a_{4,4}}$$

Riassumendo:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = 2, \ldots, n$$

Riassumendo:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{1,1}} \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad i = 2, \ldots, n$$

```
function x = LTriSol(L, b)
% Solves the nonsingular lower triangular system
% Lx = b where L is n-by-n, b is
% n-by-1, and x is n-by-1.
n = length(b); x = zeros(n, 1);
for j = 1 : n - 1
  x(j) = b(j)/L(j, j);
  b(j + 1 : n) = b(j + 1 : n) - L(j + 1 : n, j) * x(j);
end
x(n) = b(n)/L(n, n);
```

Complessità computazionale $\mathcal{O}(n^2/2)$

Metodo di Eliminazione di Gauss

Si eliminano le incognite in modo sistematico per trasformare i sistema lineare in uno equivalente con matrice a struttura triangolare superiore:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Rx} = \mathbf{y}$$

La soluzione $\mathbf{x}$ viene calcolata con l'algoritmo di sostituzione all'indietro in $\mathcal{O}(n^2/2)$ flops.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Passo 1:}}$

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right]$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Passo 1:}}$

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \\ r_2 - 2 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Passo 1:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ r_2 - 2 \cdot r_1 \rightarrow \ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ -2 \\ r_3 - 4 \cdot r_1 \rightarrow \ 0 \ \ 3 \ \ 5 \ \ 5 \ \ -12 \\ \\ \end{array}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Passo 1:

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ r_2 - 2 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \quad -2 \\ r_3 - 4 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 5 \quad -12 \\ r_4 - 3 \cdot r_1 \rightarrow \; 0 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 8 \quad -16 \end{array}$$

Esempio(II)

Passo 2:

Esempio(II)

Passo 2:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\
0 & 4 & 6 & 8 & -16
\end{array}\right]
$$

Esempio(II)

$\boxed{\text{Passo 2:}}$

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\
0 & 4 & 6 & 8 & -16
\end{array}\right]
\quad
\begin{array}{l}
\\ \\ r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \quad -6 \\ \\
\end{array}
$$

Esempio(II)

Passo 2:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\
0 & 4 & 6 & 8 & -16
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\
r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; -6 \\
r_4 - 4 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; -8
\end{array}
$$

Esempio(II)

Passo 2:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\
0 & 4 & 6 & 8 & -16
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\
r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \quad -6 \\
r_4 - 4 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \quad -8
\end{array}
$$

Passo 3:

Esempio(II)

Passo 2:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\
0 & 4 & 6 & 8 & -16
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\
r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \quad -6 \\
r_4 - 4 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \quad -8
\end{array}
$$

Passo 3:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 2 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 2 & 4 & -8
\end{array}\right]
$$

Esempio(II)

Passo 2:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 3 & 5 & 5 & -12 \\
0 & 4 & 6 & 8 & -16
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\
r_3 - 3 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 2 \;\; -6 \\
r_4 - 4 \cdot r_2 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 4 \;\; -8
\end{array}
$$

Passo 3:

$$
\begin{array}{c}
r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 2 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 2 & 4 & -8
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
r_4 - 1 \cdot r_3 \rightarrow \; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 2 \;\; -2
\end{array}
$$

Esempio (III)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{x} = $$

Soluzione del sistema triangolare:

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Soluzione del sistema triangolare: `x=UtriSol(R,y)`

Esempio (III)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}}$$

Soluzione del sistema triangolare: `x=UtriSol(R,y)`

$$\mathbf{x} = (2, 1, -2, -1)^t$$

Fattorizzazione LR (I)

Si analizzano le operazioni necessarie per trasformare $\mathbf{A}$ nella matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$:

Fattorizzazione LR (I)

Si analizzano le operazioni necessarie per trasformare $\mathbf{A}$ nella matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$:

$\boxed{\text{Passo 1}}$

Fattorizzazione LR (I)

Si analizzano le operazioni necessarie per trasformare $\mathbf{A}$ nella matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$:

$\boxed{\text{Passo 1}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione LR (I)

Si analizzano le operazioni necessarie per trasformare $\mathbf{A}$ nella matrice triangolare superiore $\mathbf{R}$:

Passo 1

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & & 1 & \\ -3 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}_2$$

Fattorizzazione LR (II)

Fattorizzazione LR (II)

Passo 2

Fattorizzazione LR (II)

Passo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione LR (II)

Passo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -3 & 1 & \\ & -4 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \quad \cdot \quad \mathbf{A}_2 \quad = \quad \mathbf{A}_3$$

Fattorizzazione LR (III)

Fattorizzazione LR (III)

$\boxed{\text{Passo 3}}$

Fattorizzazione LR (III)

$\boxed{\text{Passo 3}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Fattorizzazione LR (III)

Passo 3

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
L_3 \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{R}
$$

Fattorizzazione LR (III)

Passo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \quad \cdot \quad \mathbf{A}_3 \quad = \quad \mathbf{R}$$

Riassumendo: $L_3 \cdot L_2 \cdot L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$

Fattorizzazione LR (III)

Passo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{R}$$

Riassumendo: $L_3 \cdot L_2 \cdot L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{LR} \text{ con } \mathbf{L} = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$$

Calcolo della matrice $\mathbf{L}$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & & 1 & \\ 3 & & & 1 \end{pmatrix} \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & 4 & & 1 \end{pmatrix} \quad L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fattorzzazione LR: Caso Generale

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si definiscono $n-1$ matrici L_k $k = 1, \ldots, n-1$ tali che

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdots L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

Fattorzzazione LR: Caso Generale

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definiscono $n-1$ matrici L_k $k = 1, \ldots, n-1$ tali che

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdots L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}$$

Fattorzzazione LR: Caso Generale

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si definiscono $n-1$ matrici L_k $k = 1, \dots, n-1$ tali che

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdots L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} \overset{L_k}{\Longrightarrow}$$

Fattorzzazione LR: Caso Generale

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definiscono $n-1$ matrici L_k $k = 1, \ldots, n-1$ tali che

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot L_{n-3} \cdots L_1 \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} \quad \overset{L_k}{\Longrightarrow} \quad L_k \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{k,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrici L_k (I)

Dato $k < i \leq n$ si ha:

$$a_{i,k} - a_{k,k} \cdot \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} = 0$$

Matrici L_k (I)

Dato $k < i \leq n$ si ha:

$$a_{i,k} - a_{k,k} \cdot \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} = 0$$

$$\Downarrow$$

Matrici L_k (I)

Dato $k < i \leq n$ si ha:

$$a_{i,k} - a_{k,k} \cdot \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i,k} = a_{i,k} - \ell_{i,k} \cdot a_{k,k} = 0$$

Matrici L_k (I)

Dato $k < i \le n$ si ha:

$$a_{i,k} - a_{k,k} \cdot \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{i,k} = a_{i,k} - \ell_{i,k} \cdot a_{k,k} = 0$$

$$\ell_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$$

Matrice L_1

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -\ell_{2,1} & 1 & & & \\ -\ell_{3,1} & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -\ell_{n,1} & & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \overline{\ell}_1 \cdot \mathbf{e}_1^t$$

$\mathbf{e}_1^t = (1, 0, \ldots, 0)$ $\overline{\ell}_1 = (0, \ell_{2,1}, \ell_{3,1}, \ldots, \ell_{n,1})^t$

Matrici L_k

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{k+1,k} & \ddots & & \\ & & -\ell_{k+2,k} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t$$

$\mathbf{e}_k^t = (0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots, 0)$ $\overline{\ell}_k = (0, \ldots, 0, 0_k, \ell_{k+1,k}, \ldots, \ell_{n,k})$

Osservazioni (I)

- Matrice inversa L_k^{-1}:

$$\left(\mathbf{I} + \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t\right) \cdot \left(\mathbf{I} - \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t\right) = \mathbf{I} - \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t = \mathbf{I}$$

(infatti: $\mathbf{e}_k^t \overline{\ell}_k = 0$) quindi:

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & \ddots & & \\ & & \ell_{k+2,k} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t$$

Osservazioni (II)

- Moltiplicazione fra matrici: $L_k^{-1} \cdot L_{k+1}^{-1}$

$$\left(\mathbf{I} + \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t\right)\left(\mathbf{I} + \overline{\ell}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1}^t\right) = \mathbf{I} + \overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t + \overline{\ell}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1}^t$$

infatti: $\overline{\ell}_k \cdot \mathbf{e}_k^t \overline{\ell}_{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1}^t = 0$ quindi:

$$L_k^{-1} \cdot L_{k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & & \\ & & \ell_{k+2,k} & \ell_{k+2,k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & \ell_{n,k+1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice L

Segue quindi che $\mathbf{L} = L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}$ è data da:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_{2,1} & 1 & & & \\ \ell_{3,1} & \ell_{3,2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A}$ viene fattorizzata nel prodotto di due matrici triangolari:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

Algoritmo

```
function[A] = LU_np(A)
n = size(A, 1);
for k = 1 : n - 1
  if abs(A(k, k)) > eps,
  A(k + 1 : n, k) = A(k + 1 : n, k)/A(k, k);
  A(k + 1 : n, k + 1 : n) = ...
  A(k + 1 : n, k + 1 : n) - A(k + 1 : n, k) * A(k, k + 1 : n);
  endend
```

Algoritmo

```
function[A] = LU_np(A)
n = size(A, 1);
for k = 1 : n - 1
  if abs(A(k, k)) > eps,
    A(k + 1 : n, k) = A(k + 1 : n, k)/A(k, k);
  A(k + 1 : n, k + 1 : n) = ...
  A(k + 1 : n, k + 1 : n) - A(k + 1 : n, k) * A(k, k + 1 : n);
  endend
```

Algoritmo

$\mathtt{function[A] = LU\_np(A)}$

$\mathtt{n = size(A, 1);}$

$\mathtt{for\ k = 1 : n - 1}$

$\mathtt{if\ abs(A(k, k)) > eps,}$

$\mathtt{A(k + 1 : n, k) = A(k + 1 : n, k)/A(k, k);}$ $\quad \bar{\ell}_k$

$\mathtt{A(k + 1 : n, k + 1 : n) = \ldots}$

$\mathtt{A(k + 1 : n, k + 1 : n) - A(k + 1 : n, k) * A(k, k + 1 : n);}$

$\mathtt{endend}$

Complessità Computazionale

$\mathtt{for}\ \ \mathtt{k} = 1 : \mathtt{n} - 1$

$\mathtt{for}\ \ \mathtt{i} = \mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}$

$\mathtt{for}\ \ \mathtt{j} = \mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}$

$$\mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{j}) - \mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{k}) * \mathtt{A}(\mathtt{k},\mathtt{j}); \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} 2(\mathtt{n}-\mathtt{k})^2 \\ flops \end{matrix}$$

end, end, end

Complessità Computazionale

$$\texttt{for}\ \ \mathtt{k} = 1 : \mathtt{n} - 1$$

$$\texttt{for}\ \ \mathtt{i} = \mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}$$

$$\texttt{for}\ \ \mathtt{j} = \mathtt{k} + 1 : \mathtt{n}$$

$$\mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{j}) - \mathtt{A}(\mathtt{i},\mathtt{k}) * \mathtt{A}(\mathtt{k},\mathtt{j}); \left.\right\} \begin{array}{l} 2(\mathtt{n}-\mathtt{k})^2 \\ flops \end{array}$$

$$\mathtt{end}, \mathtt{end}, \mathtt{end}$$

Complessità Fattorizzazione LR:

$$2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2$$

Complessità Computazionale

$$\texttt{for } k = 1 : n - 1$$

$$\texttt{for } i = k + 1 : n$$

$$\texttt{for } j = k + 1 : n$$

$$A(i,j) = A(i,j) - A(i,k) * A(k,j); \quad \left.\vphantom{\begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array}}\right\} \begin{array}{l} 2(n-k)^2 \\ flops \end{array}$$

$$\text{end, end, end}$$

Complessità Fattorizzazione LR:

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = 2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

Complessità Computazionale

$$\texttt{for}\ \ \texttt{k} = 1 : \texttt{n} - 1$$

$$\texttt{for}\ \ \texttt{i} = \texttt{k} + 1 : \texttt{n}$$

$$\texttt{for}\ \ \texttt{j} = \texttt{k} + 1 : \texttt{n}$$

$$\texttt{A}(\texttt{i},\texttt{j}) = \texttt{A}(\texttt{i},\texttt{j}) - \texttt{A}(\texttt{i},\texttt{k}) * \texttt{A}(\texttt{k},\texttt{j}); \left.\right\} \begin{array}{l} 2(\texttt{n}-\texttt{k})^2 \\ flops \end{array}$$

$$\texttt{end}, \texttt{end}, \texttt{end}$$

Complessità Fattorizzazione LR:

$$2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \approx \mathcal{O}\left(\frac{2n^3}{3}\right)$$

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{1,1} = 0$$

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{1,1} = 0 \quad \Rightarrow \ell_{2,1} = ?$$

Esempio 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_{1,1} = 0 \quad \Rightarrow \ell_{2,1} =?$$

$\mathbf{A}$ è non singolare ma non si può calcolare la fattorizzazione LR

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ & 1 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ & 1 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

$$1 - 10^{20} = -10^{20}(1 + \eta), \quad \eta = -10^{-20}$$

$$fl(1 - 10^{20}) = -10^{20} \text{poichè} \ \ |\eta| < \text{eps} \approx 10^{-16}$$

Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ & 1 - 10^{20} \end{pmatrix}$$

$$1 - 10^{20} = -10^{20}(1 + \eta), \quad \eta = -10^{-20}$$

$$fl(1 - 10^{20}) = -10^{20} \text{poichè } \ |\eta| < \text{eps} \approx 10^{-16}$$

Quindi le matrici calcolate sono: $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}$

$$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ & -10^{20} \end{pmatrix} \ \widetilde{\mathbf{L}} \cdot \widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazioni

- Ci sono matrici non singolari per cui non si riesce a calcolare una fattorizzazione LR.
- Anche se le matrici $\widetilde{\mathbf{L}}$ e $\widetilde{\mathbf{R}}$ sono relativamente *vicine* a $\mathbf{L}$ e $\mathbf{R}$ il loro prodotto può essere molto diverso dalla matrice di partenza.
- I numeri di condizione di $\widetilde{\mathbf{L}}$ e $\widetilde{\mathbf{R}}$ possono essere arbitrariamente alti.

Osservazioni

- Ci sono matrici non singolari per cui non si riesce a calcolare una fattorizzazione LR.
- Anche se le matrici $\widetilde{\mathbf{L}}$ e $\widetilde{\mathbf{R}}$ sono relativamente *vicine* a $\mathbf{L}$ e $\mathbf{R}$ il loro prodotto può essere molto diverso dalla matrice di partenza.
- I numeri di condizione di $\widetilde{\mathbf{L}}$ e $\widetilde{\mathbf{R}}$ possono essere arbitrariamente alti.

$$\Downarrow$$

Fattorizzazione LR con pivot

Pivot

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

Pivot

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k}$$

Pivot

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\ & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

Pivot

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\xrightarrow{L_k}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

Pivot

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\xrightarrow{L_k}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

PIVOT

Pivot

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\xrightarrow{L_k}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{k,k} & \times & \dots & \times \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

PIVOT Se $a_{k,k} = 0$ si può scegliere un'altro elemento $a_{j,k}$ $j > k$ per calcolare la trasformazione.

Pivot Parziale

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

Pivot Parziale

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & \color{green}{\mathbf{x}} & \color{green}{\mathbf{x}} & \color{green}{\dots} & \color{green}{\mathbf{x}} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \color{red}{a_{j,k}} & \color{red}{\mathbf{x}} & \color{red}{\dots} & \color{red}{\mathbf{x}} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\quad \overset{P_k}{\longrightarrow}
$$

Pivot Parziale

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix} \overset{P_k}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & \times & \times & \dots & \times \\ & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\ & \times & \times & \dots & \times \end{pmatrix}$$

Pivot Parziale

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\overset{P_k}{\longrightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
$$

$$
\overset{L_k}{\longrightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

Pivot Parziale

$$
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
\overset{P_k}{\rightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times \\
 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & \times & \times & \dots & \times
\end{pmatrix}
$$

$$
\overset{L_k}{\rightarrow}
\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \dots & \times \\
 & a_{j,k} & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \dots & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\
 & 0 & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x}
\end{pmatrix}
$$

P_k permutazione, L_k eliminazione

Pivot Parziale

Dopo $n-1$ passi si ha:

$$L_{n-1} \cdot P_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot P_{n-2} \cdots L_1 \cdot P_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

- L'elemento con cui effettuare lo scambio può essere uno degli elementi non nulli della sottomatrice di ordine $n-k$. Questa strategia (Pivoting Completo) è troppo costosa.
- Si ricerca il pivot fra gli ultimi $n-k$ elementi della k–esima colonna (Pivot Parziale). In particolare:

$$a_{j,k} = \max_{k \le i \le n} |a_{i,k}|$$

Esempio

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}
$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underset{P_1}{\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{A_1}{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}}_{A_1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ -\frac{1}{2} & & 1 & \\ -\frac{3}{4} & & & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underset{\cdot}{\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}}_{A_1} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}}_{P_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A_2}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_2 \qquad \mathbf{A}_2 \qquad = \qquad A_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & \frac{3}{7} & 1 & \\ & \frac{2}{7} & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$L_2 \qquad \cdot \qquad A_2 \qquad = \qquad \mathbf{A}_3$$

Esempio

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}
$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}}_{P_3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_3} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}}_{A_3}$$

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}}_{P_3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_3} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}}_{A_3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L_3} \underset{\cdot}{\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}}_{A_3} \underset{=}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 5 \\ & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{17}{4} \\ & & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ & & & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

Esempio:

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{R}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 = L_3' \cdot L_2' \cdot L_1' \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1$$

infatti:

$$\underbrace{L_3}_{L_3'} \quad \underbrace{(P_3 L_2 P_3^{-1})}_{L_2'} \quad \underbrace{(P_3 P_2 L_1 P_2^{-1} P_3^{-1})}_{L_1'} \quad \underbrace{P_3 P_2 P_1 =}_{P_3 P_2 P_1}$$

$$\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{4} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{7} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{R}$$

Caso Generale

In generale per una matrice $n \times n$ la fattorizzazione LR con pivoting parziale può essere scritta come:

$$(L'_{n-1} \cdots L'_2 L'_1)(P_{n-1} \cdots P_2 P_1)\mathbf{A} = \mathbf{R}$$

con

$$L'_k = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_{k+1} L_k P_{k+1}^{-1} \cdots P_{n-2}^{-1} P_{n-1}^{-1}$$

L'_k è una matrice del tipo $\mathbf{I} - \ell_j \mathbf{e}_j^t$ e dunque facilmente invertibile.

$$P\mathbf{A} = \mathbf{LR}$$

con $P = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1$ e $\mathbf{L} = (L'_{n-1} \cdots L'_2 L'_1)^{-1}$

Sistema Lineare

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow P\mathbf{A}\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

P matrice di permutazione.

$$\mathbf{L}\mathbf{R}\mathbf{x} = P\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{y} = P\mathbf{b} \\ \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Qualunque matrice $\mathbf{A}$ non singolare ammette una fattorizzazione LR con pivoting Parziale.

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array}\right]$$

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right] = [\mathbf{R}|\mathbf{y}]$$

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array} \right] = [\mathbf{R}|\mathbf{y}]$$

Soluzione del sistema triangolare:

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array}\right] = [\mathbf{R}|\mathbf{y}]$$

Soluzione del sistema triangolare:

$$\mathbf{x} = (2, 1, -2, -1)^t$$

Sistema Lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \cdot P_3 \cdot L_2 \cdot P_2 \cdot L_1 \cdot P_1 \cdot \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 9 & 8 & -7 \end{array}\right] = [\mathbf{R}|\mathbf{y}]$$

Soluzione del sistema triangolare:

$$\mathbf{x} = (2, 1, -2, -1)^t$$

Caso Generale $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- Calcolo $\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{PA} = \mathbf{LR}$.
- $\mathbf{PA} = \mathbf{Pb}$ quindi $\mathbf{z} = \mathbf{Pb}$.
- Sistema Triangolare Inferiore:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{z}$$

- Sistema triangolare superiore:

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$$

Stabilità

- Sia $P\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{R}$ calcolata con eliminazione di gauss senza pivoting allora le matrici calcolate $\widetilde{\mathbf{L}}$,$\widetilde{\mathbf{R}}$ e $\widetilde{P}$ verificano:

$$\widetilde{\mathbf{L}} \cdot \widetilde{\mathbf{R}} = \widetilde{P} \cdot \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}, \quad \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{L}\|\|\mathbf{R}\|} = \mathcal{O}(\mathtt{eps})$$

  Se $\|\mathbf{L}\|\|\mathbf{R}\|$ è grande la perturbazione sul risultato può essere molto grande.
  Questo algoritmo è instabile.

Stabilità

- Sia $P\mathbf{A} = \mathbf{LR}$ calcolata con pivoting parziale allora le matrici calcolate $\widetilde{\mathbf{L}}$,$\widetilde{\mathbf{R}}$ e $\widetilde{P}$ verificano:

$$\widetilde{\mathbf{L}} \cdot \widetilde{\mathbf{R}} = \widetilde{P} \cdot \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}, \quad \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} = \mathcal{O}(\rho \cdot \mathtt{eps})$$

ρ è un fattore di crescita stimato come segue:

$$\rho \leq \mathbf{2^{n-1}}$$

Nelle applicazioni pratiche tale limite non viene mai raggiunto.
$\rho \leq \sqrt{\mathbf{n}}$ **Per tale ragione è l'algoritmo piú utilizzato**

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ -1 & 1 & & & 1 \\ -1 & -1 & 1 & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & -1 & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 2 \\ & & 1 & & 4 \\ & & & 1 & 8 \\ & & & & 16 \end{pmatrix}$$

La fattorizzazione non richiede pivoting. Il fattore ρ vale $16 = 2^4$
Un fattore di crescita di 2^m corrisponde alla perdita di m bit di precisione.
Con ordini $n \geq 55$ si hanno risultati totalmente inaffidabili!