# Sistemi lineari

*Esistenza e unicità della soluzione.*

**Teorema**. Sia $A$ una matrice $n \times n$. Allora le seguenti tre proposizioni sono equivalenti:

1. Il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette solo la soluzione nulla $x = 0$.
2. Per ogni vettore dei termini noti $b$, il sistema $Ax = b$ ammette un'unica soluzione.
3. $A$ eg non singolare.

# Sistemi Lineari

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad &= \vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

**Teorema 1 (Rouchè Capelli)** *Il sistema lineare ammette soluzione unica se s solo se le matrici* $\mathbf{A}$ *e* $[\mathbf{A}\mathbf{b}]$ *hanno lo stesso rango.*

# Classificazione

- $\mathbf{m = n}$ **Sistema Normale** Un sistema lineare normale ammette soluzione se e solo se $det(\mathbf{A}) \neq 0$.
- $\mathbf{m < n}$ **Sistema Indeterminato** Non c' è unicità di soluzione.
- $\mathbf{m > n}$ **Sistema Sovradeterminato** In generale non esiste soluzione si riformula il problema come minimi quadrati:

$$\min ||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||_2$$

# Condizionamento

Sia $\mathbf{x}^*$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$ si studia la soluzione del sistema perturbato:

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\widetilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

dove $\Delta\mathbf{A}$ rappresenta la perturbazione sulla matrice del sistema, mentre $\Delta\mathbf{b}$ identifica la perturbazione sul termine noto.

**Esempio:** Si risolvono i seguenti sistemi lineari:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1.000x_1^* + 2.000x_2^* & = & 3.000 \\ 0.499x_1^* + 1.001x_2^* & = & 1.500 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1^* = 1. \\ x_2^* = 1. \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1.000\widetilde{x}_1 + 2.000\widetilde{x}_2 & = & 3.000 \\ 0.500\widetilde{x}_1 + 1.002\widetilde{x}_2 & = & 1.500 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} \widetilde{x}_1 = 3. \\ \widetilde{x}_2 = 0. \end{array}$$

# Esempio

Si osserva che una piccola perturbazione nella matrice ha prodotto un grande cambiamento nella soluzione.

- Cambiamento nella matrice:

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.001 & 0.001 \end{pmatrix} \qquad \frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \approx 5.7 \cdot 10^{-4}$$

- Cambiamento nella soluzione:

$$\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \approx 1.58$$

- Problemi con tale comportamento si dicono **MAL CONDIZIONATI**.
- A piccole perturbazioni nei dati corrispondono grandi perturbazioni nei risultati.

# Sistema ben Condizionato:

Consideriamo i seguenti sistemi:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2.000x_1 - 1.000x_2 & = & -1.000 \\ -1.000x_1 + 2.000x_2 & = & 5.000 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} x_1^* = 1. \\ x_2^* = 3. \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2.000\widetilde{x}_1 - 1.000\widetilde{x}_2 & = & -1.000 \\ -1.001\widetilde{x}_1 + 2.001\widetilde{x}_2 & = & 5.000 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} \widetilde{x}_1 = 0.99993 \\ \widetilde{x}_2 = 2.9987 \end{array}$$

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.001 & 0.001 \end{pmatrix} \qquad \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \approx 4.7 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^*\|} \approx 4.7 \cdot 10^{-4}$$

# Numero di Condizione (I)

Dati

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \ \text{ e } \quad (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

si vuole stimare:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \dots$$

- (Perturbazione del termine noto) $\Delta\mathbf{A} = 0$ Sottraendo fra loro le relazioni:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} \quad \mathbf{A}(x + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

$$A(\delta\mathbf{x}) = \delta\mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$$

$$\|\delta\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\|$$

# Numero di Condizione (II)

D'altra parte:

$$\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}x\| \leq \|\mathbf{A}\|\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- (Perturbazione della sola matrice) $\delta \mathbf{b} = 0$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \Rightarrow \; -\delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

# Numero di Condizione (III)

- (Caso generale)Si può dimostrare che se $\Delta A$ è tale che

$$\|\Delta A\| \|A^{-1}\| = r < 1$$

allora il seguente sistema perturbato $(A + \Delta A)y = b + \Delta b$ è non singolare. Inoltre, se per un $\delta \geq 0$ si ha:

$$\|\Delta \mathbf{A}\| \leq \delta \|\mathbf{A}\|, \quad \|\Delta b\| \leq \delta \|b\|$$

allora

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|} \leq 2\delta \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{1}{(1 - r)}, \quad x \neq 0$$

NUMERO di CONDIZIONE $K(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|$

# Numero di Condizione (III)a

Si introducono le funzioni dipendenti da un parametro:

$$A(t) = A + t\Delta A, \quad b(t) = b + t\delta b, \quad x(t) = x + t\delta x$$

Si studia il sistema $A(t)x(t) = b(t)$ differenziando rispetto a $t$

$$A'(t)x(t) + A(t)x'(t) = b'(t) \implies \Delta A x(t) + A(t)\delta x = \delta b$$

Calcolando la relazione in $t = 0$ si ha:

$$\delta x = A^{-1}\delta b - A^{-1}\Delta A x$$

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|\delta b\|}{\|x\|} + \|A^{-1}\|\|\Delta A\|$$

# Numero di Condizione (III)b

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|A^{-1}\|\|\delta b\|}{\|A\|\|x\|} + \frac{\|A\|\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \left( \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

NUMERO di CONDIZIONE $K(\mathbf{A})$

# Numero di Condizione (IV)

- $K(\mathbf{A})$ piccolo $\sim n^p,\ p = 0, 1, 2, 3$ Problema ben condizionato.
- $K(\mathbf{A})$ grande $\sim 10^n$, Problema mal condizionato. **Esempio:** La matrice di hilbert è mal condizionata:

$$h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

- Il numero di condizione dipende dalla norma utilizzata:
  $K_1(\mathbf{A}) = \|A^{-1}\|_1 \|A\|_1$, $K_\infty(\mathbf{A}) = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty$
  $\mu_2(\mathbf{A}) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2$
  - Per tutte le norme $\ell_p$ ª $K_p(\mathbf{A}) \geq 1$ infatti

$$1 = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\|_p \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|_p \|\mathbf{A}\|_p$$

---

$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p$, $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$