ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
17 luglio 2024

Esercizio 1

Lancio due dadi regolari a sei facce e ne indico gli esiti con X e Y. Diremo che "Y è un multiplo stretto di X" se si ha $Y = kX$ per qualche $k \geq 2$.

1. Qual è la probabilità che Y sia un multiplo stretto di X?
2. Supponendo che Y sia un multiplo stretto di X, qual è il valore più probabile assunto da X?

Soluzione

Si ha $X, Y \sim \text{Unif}\{1,2,3,4,5,6\}$.

1. Introduciamo l'evento

$$A = \text{“}Y \text{ è un multiplo stretto di } X\text{”}.$$

   Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(A)$. Osserviamo che possiamo decomporre A nel modo seguente:

$$A = \{X = 1, Y \in \{2,3,4,5,6\}\} \cup \{X = 2, Y \in \{4,6\}\} \cup \{X = 3, Y = 6\},$$

   dove l'unione è disgiunta. Pertanto, usando l'indipendenza di X e Y e l'additività finita della probabilità, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y \in \{2,3,4,5,6\}) + \mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y \in \{4,6\}) + \mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(Y=6)\\ &= \frac{1}{6}\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

2. Se si verifica A, allora necessariamente $X \in \{1,2,3\}$. Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=1|A) &= \frac{\mathbb{P}(X=1, A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y \in \{2,3,4,5,6\})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}{\frac{8}{36}} = \frac{5}{8},\\ \mathbb{P}(X=2|A) &= \frac{\mathbb{P}(X=2, A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(X=2, Y \in \{4,6\})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{2}{6}}{\frac{8}{36}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\\ \mathbb{P}(X=3|A) &= \frac{\mathbb{P}(X=2, A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(X=3, Y=6)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{6}}{\frac{8}{36}} = \frac{1}{8},\end{aligned}$$

   pertanto il valore più probabile per X, se si verifica A, è il valore 1.

Esercizio 2

Agata partecipa al seguente gioco, in cui lancia un peso e riceve un premio in denaro. Prima del lancio viene posizionata una bandierina a una distanza di T metri. Agata getta il peso a una distanza di X metri: se supera la bandierina, Agata riceve 3 euro; altrimenti non riceve niente.

Assumiamo che X sia una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = 1$, ovvero X è una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x) = e^{-x} 1_{(0,\infty)}(x).$$

a) *Supponiamo innanzitutto che la distanza T sia fissata*, diciamo $T = n \in \mathbb{N}$. Quali sono le probabilità che Agata riceva rispettivamente 0 e 3 euro?

D'ora in avanti la distanza T non è più fissata: supponiamo che T sia una variabile aleatoria geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$ indipendente da X. In particolare T ha densità discreta

$$p_T(k) = \mathbb{P}(T = k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Introduciamo la variabile aleatoria

$$Y = \text{“quantità di euro ricevuti da Agata”}.$$

b) Si determini la densità discreta congiunta delle variabili aleatorie T e Y.

c) Si determini la distribuzione di Y e $\mathbb{E}[Y]$ (si ricordi che $\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k = \frac{1}{1-x}$ per $|x| < 1$).

Soluzione

a) Si ha per ipotesi $T = n \in \mathbb{N}$ fissato. Per $i = 0, 3$ indichiamo con con $q_i(n)$ la probabilità che Agata riceva i euro. Si ha

$$\begin{aligned} q_3(n) &= \mathbb{P}(X > n), \\ q_0(n) &= \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \mathbb{P}(X > n). \end{aligned}$$

Essendo

$$\mathbb{P}(X > n) = \int_n^\infty f_X(x)dx = \int_n^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}|_n^\infty = e^{-n},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} q_3(n) &= \mathbb{P}(X > n) = e^{-n}, \\ q_0(n) &= \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \mathbb{P}(X > n) = 1 - e^{-n}. \end{aligned}$$

b) Si ha $S_T = \mathbb{N}$ e $S_Y = \{0, 3\}$ dunque T e Y sono variabili aleatorie discrete. Per $k \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0, 3\}$ si ha per la regola della catena

$$p_{(T,Y)}(k, i) = \mathbb{P}(T = k, Y = i) = \mathbb{P}(Y = i|T = k)\mathbb{P}(T = k).$$

Poiché per ipotesi

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{2^k}$$

e

$$\mathbb{P}(Y = i|T = k) = q_i(k),$$

si ha dal punto a)

$$p_{(T,Y)}(k, i) = q_i(k)\frac{1}{2^k} = \begin{cases} \left(\frac{e^{-1}}{2}\right)^k & \text{se } i = 3 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{e^{-1}}{2}\right)^k & \text{se } i = 0. \end{cases}.$$

c) La distribuzione marginale di Y si ricava da quella congiunta di T e Y: per $i \in \{0, 3\}$,

$$\begin{aligned} p_Y(i) = \mathbb{P}(Y = i) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} p_{(T,Y)}(k, i) \\ &= \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{e^{-1}}{2}\right)^k = \frac{\frac{e^{-1}}{2}}{1 - \frac{e^{-1}}{2}} & \text{se } i = 3 \\ 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{e^{-1}}{2}\right)^k = 1 - \frac{\frac{e^{-1}}{2}}{1 - \frac{e^{-1}}{2}} & \text{se } i = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{e^{-1}}{2 - e^{-1}} & \text{se } i = 3 \\ \frac{2 - 2e^{-1}}{2 - e^{-1}} & \text{se } i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{3e^{-1}}{2 - e^{-1}}.$$

Esercizio 3

Siano $X \sim \mathrm{Unif}(0,2)$, $Y \sim \mathrm{Pois}(1)$ e $T \sim \mathrm{Be}(\frac{1}{2})$ variabili aleatorie indipendenti. Definiamo

$$Z := TX, \quad W := (1-T)Y.$$

a) Si calcolino media e varianza di W.

b) Si dica se Z e W sono indipendenti.

c) Si calcoli la funzione di ripartizione di Z. Si verifichi che la legge di Z non è né continua né discreta.

d) Si calcoli $\mathbb{P}(Z \leq W)$.

Soluzione

a) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W] &= \mathbb{E}[(1-T)]\mathbb{E}[Y],\\ \mathbb{E}[W^2] &= \mathbb{E}[(1-T)^2]\mathbb{E}[Y^2],\\ \mathrm{Var}(W) &= \mathbb{E}[W^2] - (\mathbb{E}[W])^2.\end{aligned}$$

Si noti che $1-T \sim \mathrm{Be}(\frac{1}{2})$, pertanto

$$\mathbb{E}[(1-T)] = \mathbb{E}[(1-T)^2] = \frac{1}{2}.$$

D'altra parte,

$$\mathbb{E}[Y] = \mathrm{Var}(Y) = 1,$$

pertanto

$$\mathbb{E}[Y^2] = (\mathbb{E}[Y])^2 + \mathrm{Var}(Y) = 2,$$

da cui

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W] &= \mathbb{E}[(1-T)]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2},\\ \mathbb{E}[W^2] &= \mathbb{E}[(1-T)^2]\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{2}2 = 1,\\ \mathrm{Var}(W) &= \mathbb{E}[W^2] - (\mathbb{E}[W])^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

b) Si ha

$$\mathrm{Cov}(Z,W) = \mathbb{E}[ZW] - \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[W].$$

Sappiamo dal punto a) che $\mathbb{E}[W] = \frac{1}{2}$. D'altra parte,

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}1 = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\mathbb{E}[ZW] = \mathbb{E}[T(1-T)]\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

essendo $T(1-T) = 0$, dato che $T \in \{0,1\}$. Di conseguenza,

$$\mathrm{Cov}(Z,W) = \mathbb{E}[ZW] - \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[W] = -\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[W] = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

Non essendo scorrelate, le variabili aleatorie Z e W non sono indipendenti.

c) Dato che $T \in \{0, 1\}$ e $Y \in (0, 2)$ si ha $Z \in [0, 2)$. Pertanto, $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = 0$ se $z < 0$ mentre $F_Z(z) = 1$ se $z \geq 2$. Per $0 \leq z < 2$ si ha

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(TX \leq z) = \mathbb{P}(T = 0) + \mathbb{P}(T = 1, X \leq z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{z}{2}.$$

In definitiva,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{z}{2} & \text{se } 0 \leq z < 2, \\ 1 & \text{se } z \geq 2. \end{cases}$$

La funzione $F_Z(\cdot)$ è discontinua nel punto $z = 0$ pertanto la legge di Z non può essere continua. D'altra parte $F_Z(\cdot)$ è discontinua solo nel punto $z = 0$, pertanto

$$\sum_{z \in \mathbb{R}} (F_Z(z) - F_Z(z-)) = F_Z(0) - F_Z(0-) = \frac{1}{2} < 1$$

e ciò mostra che la legge di Z non è nemmeno discreta.

d) Se $T = 0$ allora $Z = 0$ e dunque $Z \leq W$ (perché $W \geq 0$). Se invece $T = 1$ si ha $W = 0$ mentre $Z = X \in (0, 2)$, pertanto $Z > W$. Questo mostra che $Z \leq W$ se e solo se $T = 0$, ossia vale l'uguaglianza di eventi $\{Z \leq W\} = \{T = 0\}$. Dunque

$$\mathbb{P}(Z \leq W) = \mathbb{P}(T = 0) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 4

Jack è in prigione e ha in tasca 2 euro. Per 8 euro un altro detenuto gli lascia fare una chiamata con il suo cellulare, di cui le guardie non sono a conoscenza.

Jack riesce a convincere una guardia a giocare d'azzardo con lui. Se Jack scommette n vince n con probabilità 0.4 e perde con probabilità 0.6. Jack può scegliere tra due strategie:

1. strategia timida: scommettere 2 euro ad ogni giocata;
2. strategia aggressiva: scommettere ogni volta il massimo a sua disposizione.

a) Descrivere il gioco nei due casi tramite una catena di Markov, determinandone lo spazio degli stati, la matrice di transizione, e il corrispondente grafo orientato.

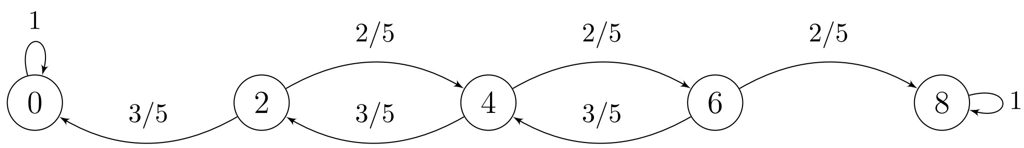
b) Classificare gli stati della catena nei due casi.

c) Quale delle due strategie dà a Jack le migliori chance di procurarsi quella chiamata? Motivare la risposta.

Soluzione

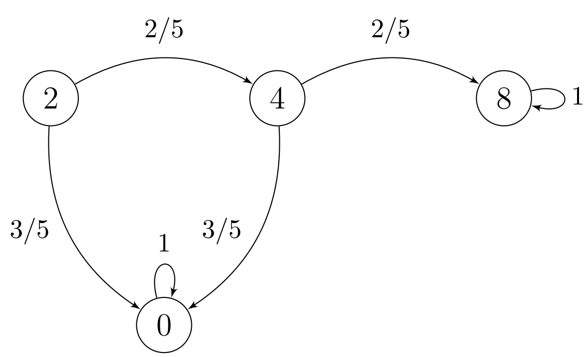
a. Nel caso della strategia 1, $\mathcal{S} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Nel caso della strategia 2, $\mathcal{S} = \{0, 2, 4, 8\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



b. Nel caso della strategia 1 ci sono una classe transitoria $T = \{2, 4, 6\}$ e due classi ricorrenti $R_1 = \{0\}$ e $R_2 = \{8\}$.

Nel caso della strategia 2 ci sono due classi transitorie $T_1 = \{2\}$ e $T_2 = \{4\}$ e due classi ricorrenti $R_1 = \{0\}$ e $R_2 = \{8\}$.

c. Occorre calcolare la probabilità di assorbimento nello stato 8 partendo dallo stato 2, ovvero h_2^8.

Nel caso della strategia 1 si ha il sistema:

$$\begin{cases} h_0^8 &= 0 \\ h_8^8 &= 1 \\ h_2^8 &= \frac{2}{5}h_4^8 \\ h_4^8 &= \frac{3}{5}h_2^8 + \frac{2}{5}h_6^8 \\ h_6^8 &= \frac{3}{5}h_4^8 + \frac{2}{5}, \end{cases}$$

da cui $h_2^8 = \frac{8}{65} = 0.1231$ ($h_4^8 = \frac{4}{13}$, $h_6^8 = \frac{38}{65}$).
Nel caso della strategia 2 si ha il sistema:

$$\begin{cases} h_0^8 &= 0 \\ h_8^8 &= 1 \\ h_2^8 &= \frac{2}{5}h_4^8 \\ h_4^8 &= \frac{2}{5}, \end{cases}$$

da cui $h_2^8 = \frac{4}{25} = 0.16$ ($h_4^8 = \frac{2}{5}$).

Concludiamo che conviene la strategia 2.