ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
19 giugno 2024

Esercizio 1

Dieci amici, tra cui Anna e Pietro, decidono di giocare due partite a *Lupus in Tabula*. In questo gioco ci sono due ruoli: *lupo* e *contadino*. In ogni partita i ruoli vengono assegnati casualmente, distribuendo ai dieci amici le carte da un mazzo contenente 2 lupi mannari e 8 contadini. I ruoli della seconda partita sono indipendenti da quelli della prima.

a) Si introduca uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ per descrivere l'esperimento aleatorio.

b) Qual è la probabilità che Anna sia un lupo in entrambe le partite?

c) Qual è la probabilità che Anna sia un lupo in almeno una partita?

d) Qual è la probabilità che Anna e Pietro siano i due lupi in entrambe le partite?

Soluzione

a) Assegniamo ad ogni giocatore un numero naturale da 1 a 10 (dove Anna corrisponde al numero 1 e Pietro corrisponde al numero 2). Uno spazio campionario che descrive una *singola* partita è l'insieme di tutte le coppie non ordinate (combinazioni) di due lupi:

$$\Omega = \mathbf{C}_{10,2} = \{A \subseteq \{1, ..., 10\} : \ |A| = 2\}.$$

Su $\mathbb{P}$ consideriamo la probabilità uniforme, quindi $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, per ogni sottoinsieme A di Ω. Si noti che $|\Omega| = \binom{10}{2} = 45$.

b) Consideriamo gli eventi

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{“Anna è lupo nella prima partita”}, \\ A_2 &= \text{“Anna è lupo nella seconda partita”}. \end{aligned}$$

Riferendosi a partite diverse, A_1 e A_2 sono eventi indipendenti, pertanto

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \ = \ \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

Per calcolare $\mathbb{P}(A_1)$ osserviamo che, essendo Anna uno dei due lupi, ci sono 9 modi per scegliere l'altro lupo. Pertanto

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) \ = \ \frac{9}{\binom{10}{2}} \ = \ \frac{9}{45} \ = \ \frac{1}{5},$$

e la probabilità che Anna sia un lupo in entrambe le partite è

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \ = \ \frac{1}{25}.$$

c) La probabilità che Anna sia un lupo in almeno una partita è

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) \ = \ \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \ = \ \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} \ = \ \frac{9}{25}.$$

d) Consideriamo gli eventi

$$\begin{aligned} C_1 &= \text{“Anna e Pietro sono i lupi nella prima partita”}, \\ C_2 &= \text{“Anna e Pietro sono i lupi nella seconda partita”}. \end{aligned}$$

Riferendosi a partite diverse, C_1 e C_2 sono eventi indipendenti, pertanto

$$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) \ = \ \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(C_2).$$

Dato che

$$\mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_2) \ = \ \frac{1}{\binom{10}{2}} \ = \ \frac{1}{45},$$

la probabilità che Anna sia un lupo in entrambe le partite è

$$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2) \ = \ \frac{1}{(45)^2}.$$

Esercizio 2

Una moneta equilibrata ha scritto $+1$ su una faccia e -1 sull'altra. Lanciamo due volte la moneta e indichiamo rispettivamente con X e Y i numeri ottenuti. Poniamo quindi

$$S := X + Y, \quad D := X - Y, \quad T := XY.$$

a) Determinare densità discreta, media e varianza di S, D e T.

b) Determinare le leggi congiunte di S e T e di X e T.

c) Calcolare $\mathrm{Cov}(S, T)$. S e T sono indipendenti?

d) Calcolare $\mathrm{Cov}(X, T)$. X e T sono indipendenti?

Soluzione

a) Si ha

X	-1	1	
p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	-1	1	
p_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

S	-2	0	2	
p_S	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

D	-2	0	2	
p_D	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

P	-1	1	1
p_P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= E[D] = -2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4} = 0,\\
\mathbb{E}[P] &= -1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2} = 0,\\
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{Var}(D) = \mathbb{E}[S^2] = 4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4} = 2,\\
\mathrm{Var}(P) &= \mathbb{E}[P^2] = 1\cdot\frac{1}{1}+1\cdot\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

b) Si ottengono le seguenti tabelle:

$S \backslash T$	1	-1	p_S
-2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
p_T	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$X \backslash T$	1	-1	p_X
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
p_T	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

c)

$$\mathrm{Cov}(S,T) = \mathbb{E}[ST]-\mathbb{E}[S]\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[ST] = (-2)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{4}+2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{4} = 0.$$

Osserviamo per esempio che $p_{(S,T)}(-2,1) = 0 \neq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = p_S(-2)\cdot p_T(1)$, pertanto S e T non sono indipendenti.

d)

$$\mathrm{Cov}(X,T) = \mathbb{E}[XT]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[XT] = 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot\frac{1}{4}+(-1)^2\cdot\frac{1}{4}+(1)^2\cdot\frac{1}{4} = 0.$$

Le variabili X e T sono indipendenti perché la loro densità congiunta è il prodotto delle densità marginali:

$$p_{(X,T)}(x,t) = p_X(x)p_T(t), \quad x,t\in\{-1,1\}.$$

Esercizio 3

Fissiamo $p \in (0,1)$ e consideriamo una moneta che dà testa con probabilità p. Un'urna inizialmente è vuota. Lancio una moneta: se esce testa, inserisco nell'urna una pallina rossa, altrimenti ne inserisco una verde. Lancio ancora la moneta ed inserisco una seconda pallina nell'urna (rossa se esce testa, verde altrimenti). Itero questa procedura n volte, ottenendo un'urna che contiene n palline. Indichiamo con X il numero di palline rosse nell'urna.

a) Determinare la probabilità che l'urna contenga k palline rosse, per ogni $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

b) Estraggo una pallina dall'urna: qual è la probabilità che sia rossa?

c) Se la pallina estratta è rossa, qual è la probabilità che l'urna contenesse k palline rosse?

Soluzione

a) Sia X il numero di palline rosse nell'urna. Per lo schema delle prove ripetute ed indipendenti, sappiamo che $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$, ossia

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,1,...,n\}.$$

b) Consideriamo l'evento

$$A \;=\; \text{“La pallina estratta è rossa”}.$$

Per la formula dell probabilità totali,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A|X=k)\mathbb{P}(X=k).$$

Poiché

$$\mathbb{P}(A|X=k) = \frac{k}{n},$$

si ottiene

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}\mathbb{E}[X] = \frac{np}{n} = p.$$

c) Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(X=k|A)$, con $k \in \{0,1,...,n\}$. Si noti che $\mathbb{P}(X=0|A)=0$. Sia ora $k \in \{1,...,n\}$. Per la formula di Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|X=k)\,\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}{p} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Da quando l'Ing. Rossi è stato assunto, lavora tutte le settimane dal lunedì al sabato, e ogni giorno lavorativo va a pranzare al self-service (stato 0), oppure in trattoria (1) oppure al bar (2). Ogni giorno decide in maniera del tutto casuale dove andare, con alcune eccezioni: non va mai due giorni consecutivi in trattoria; quando pranza al bar, il giorno dopo va sempre in trattoria. Sia X_n la variabile aleatoria che indica il luogo scelto per il pranzo dall'Ing. Rossi al suo n-esimo giorno lavorativo ($n = 1$ corrisponde al giorno del colloquio con cui è stato assunto).

a) Scrivere la matrice di transizione della catena e tracciarne il grafo.

b) Classificare gli stati della catena e discuterne il comportamento asintotico.

c) Sapendo che oggi l'Ing. Rossi è andato al self-service, qual è la probabilità che vada al bar dopodomani?

In città stanno per aprire due locali specializzati in poke, di cui l'Ing. Rossi va matto. L'Ing. Rossi ha deciso che, una volta che apriranno, non andrà più al self-service; inoltre si è imposto che non andrà mai due volte di seguito a mangiare poke.

d) Come cambierà la catena di Markov una volta che apriranno i due nuovi locali? Scrivere la nuova matrice di transizione e tracciarne il grafo.

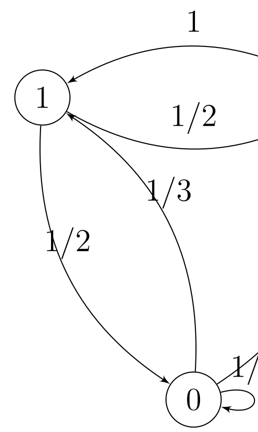
e) Se un giorno l'Ing. Rossi mangerà poke, qual è la probabilità che lo mangi ancora dopo due giorni?

Soluzione

a) La matrice di transizione è la seguente:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il grafo orientato associato alla catena di Markov è dato da



b) La catena è irriducibile e pertanto ammette un'unica distribuzione invariante, soluzione del sistema $\vec{\boldsymbol{\nu}} = \vec{\boldsymbol{\nu}}\Pi$, che è data da

$$\vec{\boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}\right).$$

Inoltre, essendo la catena aperiodica (si noti che $\pi_{11} > 0$), vale il teorema ergodico:

$$\vec{\boldsymbol{p_n}} = (p_n(0), p_n(1), p_n(2)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{\boldsymbol{\nu}} = \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}\right).$$

c)

$$\pi_{02}^2 = \pi_{00}\pi_{02} + \pi_{02}\pi_{22} + \pi_{01}\pi_{12} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

d) Siano (3) e (4) i nuovi stati che indicano i due locali di poke. La nuova matrice di transizione è la seguente (relativa agli stati $S' = \{1, 2, 3, 4\}$):

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) La probabilità cercata è

$$\pi_{34}^2 + \pi_{33}^2 + \pi_{43}^2 + \pi_{44}^2 = \pi_{31}\pi_{14} + \pi_{31}\pi_{13} + \pi_{41}\pi_{13} + \pi_{41}\pi_{14} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$