Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
25 maggio 2023

Esercizio 1

Quattro squadre di pallavolo (A, B, C e D) partecipano ad un torneo ad eliminazione diretta, ovvero: vengono disputate due semifinali e le due vincitrici si sfidano nella finale. Prima dell'inizio del torneo, i bookmakers stimano le probabilità di vittoria di ogni squadra in caso di scontro diretto con una qualsiasi delle altre squadre. Tali probabilità sono riassunte nella seguente tabella:

vittoria \ sconfitta	A	B	C	D
A		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
B	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$
D	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	

.

Supponendo che la composizione delle semifinali venga sorteggiata in maniera casuale, e che gli esiti delle due semifinali siano tra loro indipendenti, si determini:

1) la probabilità dell'evento

$$V_D = \text{“la squadra } D \text{ vince il torneo”};$$

2) la probabilità dell'evento

$$F_A = \text{“la squadra } A \text{ arriva in finale”};$$

3) la probabilità condizionata dell'evento S_{AB} dato l'evento F_{BC}, dove

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \text{“la squadra } A \text{ gioca con la squadra } B \text{ in semifinale”}, \\ F_{BC} &= \text{“la squadra } B \text{ gioca con la squadra } C \text{ in finale”}; \end{aligned}$$

4) se, ai fini di massimizzare la probabilità di vittoria finale, è più conveniente per la squadra A affrontare in semifinale la squadra B o la squadra C.

Soluzione

1. Consideriamo la partizione dell'evento certo data dai seguenti eventi equiprobabili:

$$\begin{aligned}
S_{AB} &= \text{“la squadra } A \text{ gioca con la squadra } B \text{ in semifinale”}, \\
S_{AC} &= \text{“la squadra } A \text{ gioca con la squadra } C \text{ in semifinale”}, \\
S_{AD} &= \text{“la squadra } A \text{ gioca con la squadra } D \text{ in semifinale”}.
\end{aligned}$$

Introduciamo poi gli eventi

$$\begin{aligned}
F_{AB} &= \text{“la squadra } A \text{ gioca con la squadra } B \text{ in finale”}, \\
F_{AC} &= \text{“la squadra } A \text{ gioca con la squadra } C \text{ in finale”}, \\
F_{AD} &= \text{“la squadra } A \text{ gioca con la squadra } D \text{ in finale”}, \\
F_{BC} &= \text{“la squadra } B \text{ gioca con la squadra } C \text{ in finale”},
\end{aligned}$$

e infine gli eventi

$$\begin{aligned}
V_A &= \text{“la squadra } A \text{ vince il torneo”}, \\
V_B &= \text{“la squadra } B \text{ vince il torneo”}, \\
V_C &= \text{“la squadra } C \text{ vince il torneo”}, \\
V_D &= \text{“la squadra } D \text{ vince il torneo”}.
\end{aligned}$$

Per la formula delle probabilitá totali otteniamo (si faccia l'albero):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_D) &= \mathbb{P}(S_{AB} \cap V_D) + \mathbb{P}(S_{AC} \cap V_D) + \mathbb{P}(S_{AD} \cap V_D) \\
&= \mathbb{P}(S_{AB} \cap F_{AD} \cap V_D) + \mathbb{P}(S_{AB} \cap F_{BD} \cap V_D) \\
&\quad + \mathbb{P}(S_{AC} \cap F_{AD} \cap V_D) + \mathbb{P}(S_{AC} \cap F_{CD} \cap V_D) \\
&\quad + \mathbb{P}(S_{AD} \cap F_{BD} \cap V_D) + \mathbb{P}(S_{AD} \cap F_{CD} \cap V_D).
\end{aligned}$$

Applicando la proprietà della catena, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_D) &= \mathbb{P}(S_{AB})\mathbb{P}(F_{AD}|S_{AB})\mathbb{P}(V_D|S_{AB} \cap F_{AD}) + \mathbb{P}(S_{AB})\mathbb{P}(F_{BD}|S_{AB})\mathbb{P}(V_D|F_{BD} \cap S_{AB}) \\
&\quad + \mathbb{P}(S_{AC})\mathbb{P}(F_{AD}|S_{AC})\mathbb{P}(V_D|S_{AC} \cap F_{AD}) + \mathbb{P}(S_{AC})\mathbb{P}(F_{CD}|S_{AC})\mathbb{P}(V_D|F_{CD} \cap S_{AC}) \\
&\quad + \mathbb{P}(S_{AD})\mathbb{P}(F_{BD}|S_{AD})\mathbb{P}(V_D|S_{AD} \cap F_{BD}) + \mathbb{P}(S_{AD})\mathbb{P}(F_{CD}|S_{AD})\mathbb{P}(V_D|F_{CD} \cap S_{AD})
\end{aligned}$$

per le probabilità nella tabella, e l'ipotesi di indipendenza

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} \\
&\quad + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{3} \\
&\quad + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{17}{48} \approx 0.35.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_A) &= \mathbb{P}(F_A \cap S_{AB}) + \mathbb{P}(F_A \cap S_{AC}) + \mathbb{P}(F_A \cap S_{AD}) \\
&= \mathbb{P}(F_A|S_{AB})\mathbb{P}(S_{AB}) + \mathbb{P}(F_A|S_{AC})\mathbb{P}(S_{AC}) + \mathbb{P}(F_A|S_{AD})\mathbb{P}(S_{AD}) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{36} \approx 0.47.
\end{aligned}$$

3. Per la formula delle probabilità totali otteniamo

$$\mathbb{P}(F_{BC}) = \mathbb{P}(F_{BC} \cap S_{AB}) + \mathbb{P}(F_{BC} \cap S_{AC})$$

(per la regola della catena)

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(F_{BC}|S_{AB})\mathbb{P}(S_{AB}) + \mathbb{P}(F_{BC}|S_{AC})\mathbb{P}(S_{AC}) \\
&= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{36}.
\end{aligned}$$

Usiamo ora la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(S_{AB}|F_{BC}) = \frac{\mathbb{P}(F_{BC}|S_{AB})\mathbb{P}(S_{AB})}{\mathbb{P}(F_{BC})} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{36}} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

4. Confrontiamo $\mathbb{P}(V_A|S_{AB})$ con $\mathbb{P}(V_A|S_{AC})$. Applicando formula delle probabilità totali e regola della catena otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_A|S_{AB}) &= \mathbb{P}(V_A \cap F_{AC}|S_{AB}) + \mathbb{P}(V_A \cap F_{AD}|S_{AB}) \\
&= \mathbb{P}(V_A|F_{AC} \cap S_{AB})\mathbb{P}(F_{AC}|S_{AB}) + \mathbb{P}(V_A|F_{AD} \cap S_{AB})\mathbb{P}(F_{AD}|S_{AB}) \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{19}{72} \approx 0.26,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_A|S_{AC}) &= \mathbb{P}(V_A \cap F_{AB}|S_{AC}) + \mathbb{P}(V_A \cap F_{AD}|S_{AC}) \\
&= \mathbb{P}(V_A|F_{AB} \cap S_{AC})\mathbb{P}(F_{AB}|S_{AC}) + \mathbb{P}(V_A|F_{AD} \cap S_{AC})\mathbb{P}(F_{AD}|S_{AC}) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{24} \approx 0.21.
\end{aligned}$$

Quindi per la squadra A è più conveniente affrontare in semifinale la squadra B rispetto alla squadra C.

Esercizio 2

8 individui, di cui 4 biondi e 4 castani, prendono posto uno dietro l'altro in una canoa, in maniera completamente casuale. Determinare:

1) uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ che descriva l'esperimento aleatorio;

2) la probabilità che gli individui biondi e castani si siedano in maniera alternata;

3) la probabilità che, partendo dalla prua e procedendo verso poppa, i primi 4 individui siano tutti biondi, e che Giovanni (biondo) sia seduto vicino ad Anna (castana);

4) la probabilità che gli individui biondi e castani si siedano in maniera alternata e che Giovanni sia seduto vicino ad Anna.

Soluzione

1. Si può prendere come spazio campionario l'insieme delle permutazioni di 8 elementi con la probabilità uniforme, ovvero

$$\Omega = \mathbf{P}_8, \qquad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\mathbf{P}_8|} = \frac{1}{8!} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

2. Essendo la probabilità quella uniforme, per determinare la probabilità di un evento utilizziamo la formula "casi favorevoli su casi possibili". Definiamo

$$F \;=\; \text{“individui biondi e castani si siedono in maniera alternata”}.$$

Per determinare la cardinalità di F usiamo il principio delle scelte successive:

- scelta delle configurazioni alternate: 2 possibilità (biondo-castano-biondo-castano-biondo-castano-biondo-castano e castano-biondo-castano-biondo-castano-biondo-castano-biondo);
- scelta dei modi in cui i 4 individui biondi possono sedersi in 4 posti: 4! possibilità;
- scelta dei modi in cui i 4 individui castani possono sedersi in 4 posti: 4! possibilità.

Quindi otteniamo

$$|F| = 2 \times 4! \times 4!$$

e perciò

$$\mathbb{P}(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{2 \times 4! \times 4!}{8!} = \frac{1}{35} \approx 0.03.$$

3. Procediamo come sopra. Poniamo

$$\begin{aligned} G \;=\; & \text{“partendo da prua, i primi 4 individui sono biondi,} \\ & \text{e Giovanni (biondo) è seduto vicino ad Anna (castana)”.} \end{aligned}$$

Per determinare la cardinalità di G usiamo il principio delle scelte successive:

- scelta delle configurazioni: 1 possibilità (biondo-biondo-biondo-biondo-castano-castano-castano-castano);
- scelta dei modi in cui 3 individui biondi (tutti tranne Giovanni) possono sedersi nei primi 3 posti: 3! possibilità;
- scelta dei modi in cui 3 individui castani (tutti tranne Anna) possono sedersi in 3 posti: 3! possibilità.

Quindi otteniamo

$$|G| = 3! \times 3!$$

e perciò

$$\mathbb{P}(F) = \frac{|G|}{|\Omega|} = \frac{3! \times 3!}{8!} = \frac{1}{1120} \approx 0.00089.$$

4. Procediamo come sopra. Poniamo

$$\begin{aligned} H \;=\; & \text{“individui biondi e castani si siedono in maniera alternata,} \\ & \text{e Giovanni è seduto vicino ad Anna”.} \end{aligned}$$

Per determinare la cardinalità di H usiamo il principio delle scelte successive:

- scelta delle configurazioni alternate: 2 possibilità (biondo-castano-biondo-castano-biondo-castano-biondo-castano e castano-biondo-castano-biondo-castano-biondo-castano-biondo);
- scelta dei modi in cui Giovanni e Anna possono sedersi vicini: 7 possibilità (primo-secondo, secondo-terzo, terzo-quarto, quarto-quinto, quinto-sesto, sesto-settimo, settimo-ottavo);
- scelta dei modi in cui i 3 individui castani possono sedersi in 3 posti: 3! possibilità.
- scelta dei modi in cui i 3 individui biondi possono sedersi in 3 posti: 3! possibilità.

Quindi otteniamo

$$|H| = 2 \times 7 \times 3! \times 3!$$

e perciò

$$\mathbb{P}(H) = \frac{|H|}{|\Omega|} = \frac{2 \times 7 \times 3! \times 3!}{8!} = \frac{1}{80} = 0.0125.$$

Esercizio 3

Sia N la variabile aleatoria che conta il numero di studenti che si iscriveranno alla laurea in Informatica nell'anno accademico 2023/2024, e sia X quella che conta il numero di studenti che supererà l'esame di "Probabilitá e statistica" nello stesso anno accademico.

Si assuma che N abbia distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 10$, e che ogni studente iscritto abbia probabilità $p = 0.8$ di superare l'esame, indipendentemente dal numero di studenti iscritti e dall'esito dei suoi colleghi.

Si determini:

1) $\mathbb{P}(N > 2)$;

2) se N e X sono o no indipendenti, motivando la risposta;

3) $\mathbb{P}(N = 10, X = 6)$;

4) $\mathbb{E}[X]$.

Soluzione

1. Per complementarità e utilizzando $N \sim \text{Poisson}(10)$, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N > 2) &= 1 - \mathbb{P}(N = 0) - \mathbb{P}(N = 1) - \mathbb{P}(N = 2) \\ &= 1 - e^{-10} - e^{-10}10 - e^{-10}\frac{10^2}{2} \approx 0.997.\end{aligned}$$

3. Condizionatamente al fatto che si sono iscritti 10 studenti, il numero degli studenti che supera l'esame è una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 0.8$, in quanto può essere vista come il numero di successi di prove indipendenti ognuna con probabilità p di successo. Quindi

$$\mathbb{P}(X = 6 | N = 10) = \binom{10}{6} 0.8^6 (1 - 0.8)^4.$$

Per la proprietà della catena otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = 10, X = 6) &= \mathbb{P}(X = 6 | N = 10)\mathbb{P}(N = 10) \\ &= \binom{10}{6} 0.8^6 (1 - 0.8)^4 e^{-10}\frac{10^{10}}{10!} \approx 0.011.\end{aligned}$$

2. N e X non sono indipendenti. Un modo di vederlo è il seguente. Dal punto precedente otteniamo che $\mathbb{P}(X = 6) \geq \mathbb{P}(N = 10, X = 6) > 0$. Inoltre vale anche $\mathbb{P}(N = 1) > 0$. Quindi $\mathbb{P}(X = 6) \times \mathbb{P}(N = 1) > 0$. Però vale anche $\mathbb{P}(N = 3, X = 6) = 0$, e quindi

$$\mathbb{P}(X = 6) \times \mathbb{P}(N = 1) \neq \mathbb{P}(N = 3, X = 6).$$

4. Ragionando come nel punto 3 si ottiene

$$\mathbb{P}(N = n, X = x) = \binom{n}{x} 0.8^x (1 - 0.8)^{n-x} p_N(n)$$

per ogni $n = 0, 1, \cdots$, e ogni $x = 0, \cdots, n$. Perciò si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} 0.8^x (1 - 0.8)^{n-x} p_N(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) \underbrace{\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} 0.8^x (1 - 0.8)^{n-x}}_{\text{valore atteso distribuzione binomiale}} \\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) 0.8\, n}_{0.8\times \text{ valore atteso distribuzione di Poisson}} = 0.8 \times 10 = 8.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Si consideri la variabile aleatoria X con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - e^{-(x+1)}, & x \geq -1. \end{cases}$$

Determinare

1) $\mathbb{E}[X+1]$;

2) $cov(X, X+1)$;

3) la funzione di ripartizione di $Y := X + 1$;

4) una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(Y) \sim Unif_{[0,1]}$.

Soluzione

1. La densità di probabilità di X è

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < -1, \\ e^{-(x+1)}, & x \geq -1, \end{cases}$$

   e quindi

$$\mathbb{E}[X+1] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1] = \underbrace{\int_{-1}^{\infty} x e^{-(x+1)} dx}_{=0} + 1 = 1.$$

2. Per le proprietà della covarianza abbiamo

$$cov(X, X+1) = var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{\mathbb{E}[X]^2}_{=0} = \underbrace{\int_{-1}^{\infty} x^2 e^{-(x+1)} dx}_{=1} = 1.$$

3. La v.a. Y risulta di distribuzione esponenziale di parametro 1. Infatti,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X + 1 \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x - 1) \\ &= F_X(x-1) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Notiamo intanto che g de Deve valere che per $x \in [0,1]$ vale

$$F_{g(Y)}(x) = F_{Unif_{[0,1]}}(x) = x.$$

D'altra parte, abbiamo

$$F_{g(Y)}(x) = \mathbb{P}(g(Y) \leq x)$$

(ipotizzando che g sia crescente)

$$= \mathbb{P}(Y \leq g^{-1}(x)) = F_Y(g^{-1}(x)).$$

Le due sopra danno

$$F_Y(g^{-1}(x)) = x, \qquad x \in [0,1],$$

e quindi $g = F_Y$.