



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

UNIVERSITÀ DI BOLOGNA - SCUOLA DI SCIENZE
ESAME SCRITTO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ E STATISTICA
22 GIUGNO 2023

ESERCIZIO 1

Luca ha tre monete a disposizione, ciascuna con un crescente livello di trucco a favore della testa: una bianca equilibrata, una azzurra con probabilità di testa pari a $3/4$, una blu con probabilità di testa pari a $7/8$.

Luca ha tre lanci a disposizione. Al primo lancio utilizza la moneta bianca. Ai lanci successivi utilizza la moneta del lancio precedente, se in quest'ultimo ha ottenuto testa, o la moneta con il livello di trucco successivo, se invece ha ottenuto croce.

Sia X_k la variabile che indica se al lancio k esce testa, $k = 1, 2, 3$.

- ~~1)~~ Quanto vale la probabilità di ottenere testa al terzo lancio sapendo di aver ottenuto testa al primo e al secondo lancio?
- ~~2)~~ Quanto vale la probabilità di ottenere testa al terzo lancio sapendo di aver ottenuto testa al secondo lancio?
- ~~3)~~ Quanto vale la probabilità di ottenere testa al terzo lancio?

Sia Y il totale delle teste sui tre lanci.

- ~~4)~~ Determinare la legge e il valore atteso di Y .

ESERCIZIO 2

Sei palline sono disposte in maniera causale e indipendente in tre urne. Consideriamo gli eventi:

A = la prima urna contiene due palline;

B = ogni urna contiene due palline.

- ~~1)~~ Si determini uno spazio campionario relativo all'esperimento aleatorio e se ne calcoli la cardinalità.

Si calcolino

- 2) $\mathbb{P}(A)$;
- \rightarrow 3) $\mathbb{P}(B)$;
- 4) $\mathbb{P}(A|B)$ e $\mathbb{P}(B|A)$.

ESERCIZIO 3

Nel periodo autunnale Paolo e Marco si dilettono nella raccolta dei funghi: ciascuno dei due esce al mattino presto e torna a casa non appena trova due funghi, o comunque dopo 20 minuti di ricerca. Il risultato è che ogni giorno il numero di funghi X raccolti da Paolo e Y raccolti da Marco sono casuali, compresi tra 0, 1 e 2. Sappiamo che X e Y sono entrambi uniformemente distribuiti tra 0, 1 e 2, e che la loro distribuzione congiunta è data da

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/6	1/6	0
1	1/6	0	1/6
2	0	1/6	1/6

- 1) I numeri di funghi raccolti giornalmente da Paolo e Marco sono indipendenti?
- 2) Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$.

Indichiamo con W e Z le minima e la massima raccolta giornaliera fra quelle di Paolo e Marco.

- 3) Trovare la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali di W e Z .

ESERCIZIO 4

Un fisico sperimentale deve misurare il tempo T di percorrenza di un segnale attraverso un canale di comunicazione. Tale tempo T è casuale con distribuzione continua di densità (misurando il tempo in millisecondi)

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ ae^{-3(t-1)}, & \text{se } t \geq 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

- 1) Determinare a tale che f_T sia effettivamente una densità.
- 2) Calcolare la funzione di ripartizione di T .
- 3) Calcolare il valore atteso impiegato dal segnale per percorrere il canale di comunicazione.

La strumentazione a disposizione del fisico è tuttavia poco soddisfacente: essa consente una misurazione esatta di T solamente solo se T non supera 1 millisecondo, altrimenti, superata tale soglia, va fuori scala, mostrando sempre quest'ultimo valore.

- 4) Calcolare il valore atteso del risultato di una misurazione con questa strumentazione.