ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

# Università di Bologna - Scuola di Scienze

## Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
22 giugno 2023

### Esercizio 1

Luca ha tre monete a disposizione, ciascuna con un crescente livello di trucco a favore della testa: una bianca equilibrata, una azzurra con probabilità di testa pari a 3/4, una blu con probabilità di testa pari a 7/8.

Luca ha tre lanci a disposizione. Al primo lancio utilizza la moneta bianca. Ai lanci successivi utilizza la moneta del lancio precedente, se in quest'ultimo ha ottenuto testa, o la moneta con il livello di trucco successivo, se invece ha ottenuto croce.

Sia $X_k$ l'evento "al lancio $k$ esce testa", con $k = 1, 2, 3$.

1) Quanto vale la probabilità di ottenere testa al terzo lancio sapendo di aver ottenuto testa al primo e al secondo lancio?

2) Quanto vale la probabilità di ottenere testa al terzo lancio sapendo di aver ottenuto testa al secondo lancio?

3) Quanto vale la probabilità di ottenere testa al terzo lancio?

Sia $Y$ il totale delle teste sui tre lanci.

4) Determinare la legge e il valore atteso di $Y$.

## Soluzione

1) $\mathbb{P}(X_3|X_1 \cap X_2) = \frac{1}{2}$.

2) $\mathbb{P}(X_3|X_2) = \frac{\mathbb{P}(X_3 \cap X_2)}{\mathbb{P}(X_2)} = \frac{\mathbb{P}(X_3 \cap X_2|X_1)\mathbb{P}(X_1)+\mathbb{P}(X_3 \cap X_2|X_1^c)\mathbb{P}(X_1^c)}{\mathbb{P}(X_2|X_1)\mathbb{P}(X_1)+\mathbb{P}(X_2|X_1^c)\mathbb{P}(X_1^c)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{1}{2}} = \frac{13}{20}$.

3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3) &= \mathbb{P}(X_3 \cap X_2 \cap X_1) + \mathbb{P}(X_3 \cap X_2^c \cap X_1) + \mathbb{P}(X_3 \cap X_2 \cap X_1^c) + \mathbb{P}(X_3 \cap X_2^c \cap X_1^c) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{7}{8} = \frac{45}{64}.\end{aligned}$$

4) Si ha

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y=3) = \mathbb{P}(X_1 \cap X_2 \cap X_3) = \frac{1}{8}, \\ &\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X_1^c \cap X_2^c \cap X_3^c) = \frac{1}{64}, \\ &\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X_1 \cap X_2^c \cap X_3^c) + \mathbb{P}(X_1^c \cap X_2 \cap X_3^c) + \mathbb{P}(X_1^c \cap X_2^c \cap X_3) = \frac{17}{64},\end{aligned}$$

pertanto

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_Y$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{17}{64}$ | $\frac{19}{32}$ | $\frac{1}{8}$ |

e $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}(Y=1) + 2\mathbb{P}(Y=2) + 3\mathbb{P}(Y=3) = \frac{117}{64}$.

## Esercizio 2

Sei palline sono disposte in maniera causale e indipendente in tre urne. Consideriamo gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{la prima urna contiene due palline;} \\ B &= \text{ogni urna contiene due palline.} \end{aligned}$$

1) Si determini uno spazio campionario relativo all'esperimento aleatorio e se ne calcoli la cardinalità.

Si calcolino

2) $\mathbb{P}(A)$;

3) $\mathbb{P}(B)$;

4) $\mathbb{P}(A|B)$ e $\mathbb{P}(B|A)$.

## Soluzione

1) $\Omega = DR_{3,6}$ da cui $|\Omega| = 3^6$.

2) $\mathbb{P}(A) = \frac{|C_{6,2}||DR_{2,4}|}{|DR_{3,6}|} = \frac{\binom{6}{2}2^4}{3^6} \approx 0.33$.

3) $\mathbb{P}(B) = \frac{|C_{6,2}||C_{4,2}|}{|DR_{3,6}|} = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{3^6} \approx 0.12$.

4) Essendo $B \subseteq A$, si ha $\mathbb{P}(A|B) = 1$ e $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \approx 0.375$.

## Esercizio 3

Nel periodo autunnale Paolo e Marco si dilettano nella raccolta dei funghi: ciascuno dei due esce al mattino presto e torna a casa non appena trova due funghi, o comunque dopo 20 minuti di ricerca. Il risultato è che ogni giorno il numero di funghi $X$ raccolti da Paolo e $Y$ raccolti da Marco sono casuali, compresi tra 0, 1 e 2. Sappiamo che $X$ e $Y$ sono entrambi uniformemente distribuiti tra 0, 1 e 2, e che la loro distribuzione congiunta di $X$ e $Y$ è data da

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/6 | 1/6 | 0 |
| 1 | 1/6 | 0 | 1/6 |
| 2 | 0 | 1/6 | 1/6 |

1) I numeri di funghi raccolti giornalmente da Paolo e Marco sono indipendenti?

2) Calcolare $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Indichiamo con $W$ e $Z$ le minima e la massima raccolta giornaliera fra quelle di Paolo e Marco.

3) Trovare la distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali di $W$ e $Z$.

## Soluzione

1) I numeri di funghi raccolti giornalmente da Paolo e Marco non sono indipendenti, infatti
$$0 = \mathbb{P}(X = Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{9}.$$

2) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 2\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{3}$.

3) La distribuzione congiunta e le distribuzioni marginali di $W$ e $Z$ sono date da

| $W \backslash Z$ | 0 | 1 | 2 | $p_W$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/6 | 1/3 | 0 | 1/2 |
| 1 | 0 | 0 | 1/3 | 1/3 |
| 2 | 0 | 0 | 1/6 | 1/6 |
| $p_Z$ | 1/6 | 1/3 | 1/2 | 1 |

## Esercizio 4

Un fisico sperimentale deve misurare il tempo $T$ di percorrenza di un segnale attraverso un canale di comunicazione. Tale tempo $T$ è casuale con distribuzione continua di densità (misurando il tempo in millisecondi)

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ ae^{-3(t-1)}, & \text{se } t \geq 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

1) Determinare $a$ tale che $f_T$ sia effettivamente una densità.
2) Calcolare la funzione di ripartizione di $T$.
3) Calcolare il valore atteso impiegato dal segnale per percorrere il canale di comunicazione.

La strumentazione a disposizione del fisico è tuttavia poco soddisfacente: essa consente una misurazione esatta di $T$ solamente solo se $T$ non supera 1 millisecondo, altrimenti, superata tale soglia, va fuori scala, mostrando sempre quest'ultimo valore.

4) Calcolare il valore atteso del risultato di una misurazione con questa strumentazione.

## Soluzione

1) $a = \frac{3}{2}$.

2) $T \geq 0$ q.c., pertanto $F_T(t) = 0$ per $t < 0$. Per $t \in [0,1)$

$$F_T(t) = \int_0^t \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{t^3}{2},$$

mentre per $t \geq 1$

$$F_T(t) = \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 dx + \int_1^t \frac{3}{2} e^{-3(x-1)} dx = 1 - \frac{1}{2} e^{-3(t-1)}.$$

3)

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^{+\infty} x f_T(x) dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx + \int_1^{+\infty} \frac{3}{2} x e^{-3(x-1)} dx = \frac{25}{24} = 1.04.$$

4) Detto $Y = \min\{T, 1\}$, si ha

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} \min\{x,1\} f_T(x) dx = \int_0^1 x f_T(x) dx + \int_1^{+\infty} 1 f_T(x) dx = 0.875.$$