Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
25 maggio 2023

Esercizio 1

Un sacchetto contiene 8 coccodrilli gommosi così suddivisi: 2 verdi, 2 gialli e 4 rossi. 3 bambini scelgono una caramella a testa e la mangiano, a turno, in maniera completamente casuale. Si considerino gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{"tutti i coccodrilli gialli rimangono nel sacchetto"}, \\ B &= \text{"tutti i coccodrilli gialli vengono mangiati"}, \\ C &= \text{"il primo e l'ultimo bambino mangiano un coccodrillo verde"}. \end{aligned}$$

1) Si calcoli $\mathbb{P}(A)$.

2) Si calcoli $\mathbb{P}(B)$.

3) Si calcoli $\mathbb{P}(C)$

4) Due bambini vogliono entrambi mangiare un coccodrillo rosso e litigano perché entrambi vogliono pescare per primi. È ragionevole?

Esercizio 2

Una sequenza di DNA si può rappresentare con una successione ordinata di lettere, "A, C, G, T", corrispondenti alle 4 basi costituenti. Supponendo che una sequenza di 10 lettere (corrispondente a un giro di elica) si formi scegliendo in maniera casuale e indipendente ogni suo elemento, si determini:

1. uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ che descriva l'esperimento aleatorio;
2. la probabilità che la sequenza contenga la base G;
3. la probabilità che la sequenza contenga esattamente 4 basi A;
4. la probabilità che la sequenza contenga solo le basi A e C in egual numero.

Esercizio 3

Si considerino due variabili aleatorie discrete indipendenti X, Y, entrambe con supporto $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$ e tali che:

$$\mathbb{E}[X] = 0 = \mathbb{E}[Y], \quad var(X) = 1, \qquad var(Y) = 1/2. \tag{0.1}$$

1) Determinare le leggi congiunte e marginali di X e Y, ovvero

$$p_{(X,Y)}(x, y), p_X(x), p_Y(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}. \tag{0.2}$$

2) Calcolare $\mathbb{E}[(4X + 1)(Y - 3)]$.

3) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y > 0)$.

4) Siano $U = \max(X, Y)$ e $V = |XY|$. Calcolare le leggi congiunte e marginali di U e V.

Esercizio 4

Si consideri la funzione definita da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - c/x, & x \geq 1. \end{cases}$$

1) Determinare i valori ammissibili per $c \in \mathbb{R}$ affinché F sia la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X.

2) Determinare il valore di c per cui X è una variabile aleatoria continua e determinarne la sua densità f_X.

3) Calcolare $\mathbb{P}(X \geq 1)$ e $\mathbb{P}(|X| > 2)$.

4) Sia Y la variabile aleatoria continua $Y = |X - 2|$. Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.