Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
25 maggio 2023

Esercizio 1

Un sacchetto contiene 8 coccodrilli gommosi così suddivisi: 2 verdi, 2 gialli e 4 rossi. 3 bambini scelgono una caramella a testa e la mangiano, a turno, in maniera completamente casuale. Si considerino gli eventi:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“tutti i coccodrilli gialli rimangono nel sacchetto”}, \\
B &= \text{“tutti i coccodrilli gialli vengono mangiati”}, \\
C &= \text{“il primo e l'ultimo bambino mangiano un coccodrillo verde”}.
\end{aligned}
$$

1) Si calcoli $\mathbb{P}(A)$.

2) Si calcoli $\mathbb{P}(B)$.

3) Si calcoli $\mathbb{P}(C)$

4) Due bambini vogliono entrambi mangiare un coccodrillo rosso e litigano perché entrambi vogliono pescare per primi. È ragionevole?

Soluzione

1. Introduciamo gli eventi

$$
\begin{aligned}
G_i &= \text{“l'}i\text{-esimo bambino mangia un coccodrillo giallo”}, \\
R_i &= \text{“l'}i\text{-esimo bambino mangia un coccodrillo rosso”}, \\
V_i &= \text{“l'}i\text{-esimo bambino mangia un coccodrillo verde”'}.
\end{aligned}
$$

   per $i = 1, 2, 3$. Allora
$$A = G_1^c \cap G_2^c \cap G_3^c$$
   e quindi, per la formula della catena, abbiamo
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(G_1^c) \times \mathbb{P}(G_2^c|G_1^c) \times \mathbb{P}(G_3^c|G_1^c \cap G_2^c) = \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{14}.$$

2. Possiamo scrivere B come un'unione di insiemi disgiunti corrispondenti a diverse traiettorie dell'albero, ovvero:
$$B = (G_1 \cap G_2 \cap G_3^c) \cup (G_1 \cap G_2^c \cap G_3) \cup (G_1^c \cap G_2 \cap G_3),$$

Quindi vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap G_3^c) + \mathbb{P}(G_1 \cap G_2^c \cap G_3) + \mathbb{P}(G_1^c \cap G_2 \cap G_3) \\
&= \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2|G_1) \times \mathbb{P}(G_3^c|G_1 \cap G_2) \\
&\quad + \mathbb{P}(G_1) \times \mathbb{P}(G_2^c|G_1) \times \mathbb{P}(G_3|G_1 \cap G_2^c) \\
&\quad + \mathbb{P}(G_1^c) \times \mathbb{P}(G_2|G_1^c) \times \mathbb{P}(G_3|G_1^c \cap G_2) \\
&= \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} \times 1 + \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{6} + \frac{6}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{28}.
\end{aligned}$$

3. Dato che ci sono solo 2 coccodrilli verdi, possiamo scrivere C come

$$C = V_1 \cap V_2^c \cap V_3$$

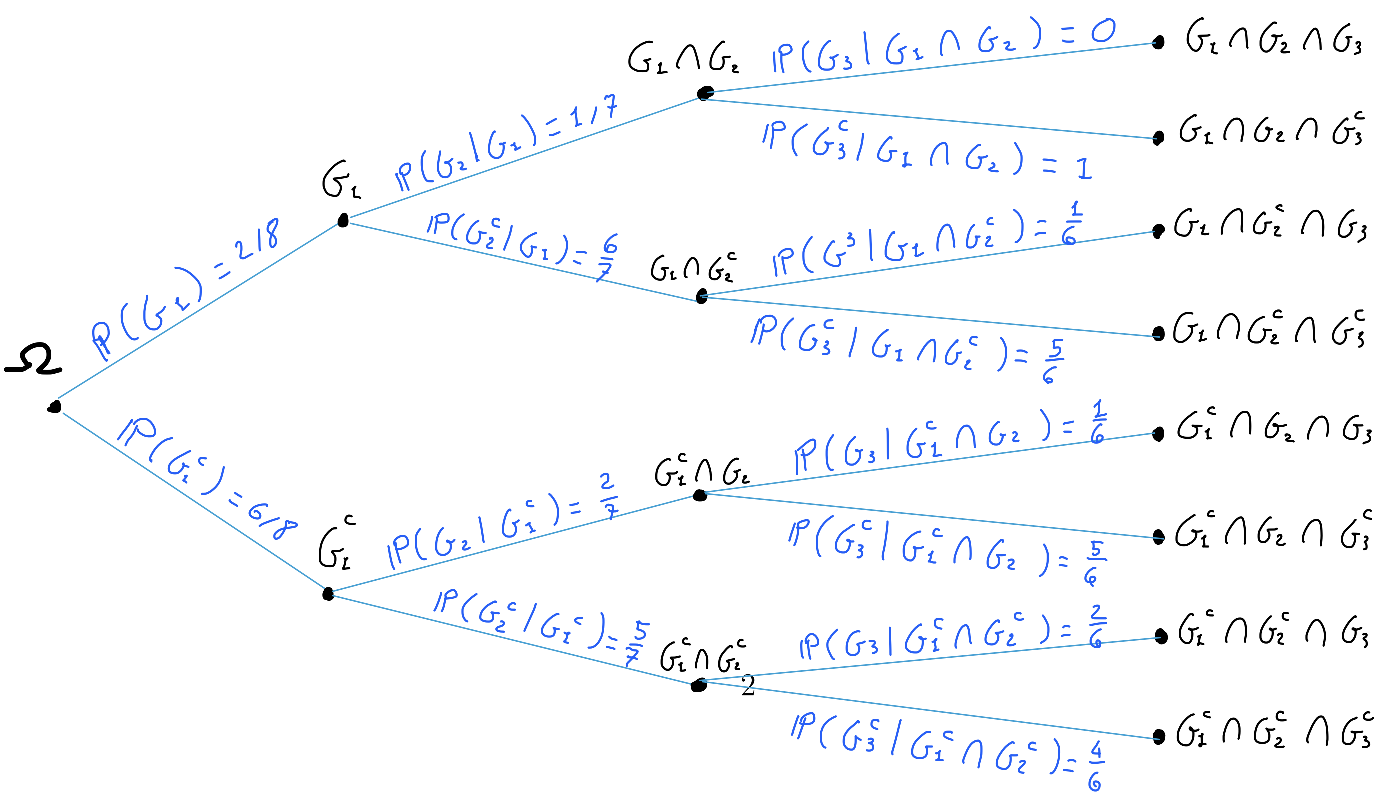
e quindi

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2^c|V_1) \times \mathbb{P}(V_3|V_1 \cap V_2^c) = \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{28}.$$

4. Si tratta di valutare se R_1, R_2 e R_3 hanno o no le stessa probabilità. Otteniamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(R_1^c \cap R_2) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2|R_1) + \mathbb{P}(R_1^c) \times \mathbb{P}(R_2|R_1^c) \\
&= \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{8}\Big(\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\Big) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}(R_3) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(R_1^c \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(R_1 \cap R_2^c \cap R_3) + \mathbb{P}(R_1^c \cap R_2^c \cap R_3) \\
&= \cdots = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

In conclusione, non ha senso litigare per chi pesca per primo.



Esercizio 2

Una sequenza di DNA si può rappresentare con una successione ordinata di lettere, "A, C, G, T", corrispondenti alle 4 basi costituenti. Supponendo che una sequenza di 10 lettere (corrispondente a un giro di elica) si formi scegliendo in maniera casuale e indipendente ogni suo elemento, si determini:

1. uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathbb{P})$ che descriva l'esperimento aleatorio;
2. la probabilità che la sequenza contenga la base G;
3. la probabilità che la sequenza contenga esattamente 4 basi A;
4. la probabilità che la sequenza contenga solo le basi A e C in egual numero.

Soluzione

1. Si può prendere come spazio campionario l'insieme delle disposizioni con ripetizioni e come probabilità quella uniforme, ovvero
$$\Omega = \mathbf{DR}_{4,10}, \qquad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{4^{10}} \quad \forall \omega \in \Omega.$$
2. Essendo la probabilità quella uniforme, per determinare la probabilità di un evento utilizziamo la formula "casi favorevoli su casi possibili". Definiamo
$$F \;=\; \text{“la sequenza contiene la base G”}.$$
Siccome F^c può essere identificato con le disposizioni con ripetizione $\mathbf{DR}_{3,10}$, la cui cardinalità è $|\mathbf{DR}_{3,10}| = 3^{10}$, otteniamo
$$\mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}(F^c) = 1 - \frac{3^{10}}{4^{10}}.$$
3. Consideriamo la famiglia di eventi
$$E_i \;=\; \text{“l'}i\text{-esimo elemento della sequenza è una base A”}, \qquad i = 1, \cdots, 10,$$
e la variabile aleatoria X definita da
$$X = \sum_{i=1}^{10} \mathbf{1}_{E_i}.$$
Siamo interessati a calcolare la probabilità dell'evento $\{X = 4\}$. Dato che gli eventi E_i sono indipendenti e hanno tutti probabilità $\frac{1}{4}$, abbiamo $X \sim \mathrm{B}(10, 1/4)$, e quindi
$$\mathbb{P}(X = 4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^6.$$
4. Dobbiamo contare le sequenze che contengono 5 basi A e 5 basi C. Queste corrispondono al numero delle possibili scelte delle posizioni delle 5 basi A tra le 10 posizioni totali, ovvero $\binom{10}{5}$. Perciò, di nuovo utilizzando la formula "casi favorevoli su casi possibili", la probabilità in questione è
$$\frac{\binom{10}{5}}{4^{10}}.$$

Esercizio 3

Si considerino due variabili aleatorie discrete indipendenti X, Y, entrambe con supporto $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$ e tali che:

$$\mathbb{E}[X] = 0 = \mathbb{E}[Y], \quad var(X) = 1, \qquad var(Y) = 1/2.$$

1) Determinare le leggi congiunte e marginali di X e Y, ovvero

$$p_{(X,Y)}(x, y), p_X(x), p_Y(y), \qquad \forall x, y \in \mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}.$$

2) Calcolare $\mathbb{E}[(4X + 1)(Y - 3)]$.

3) Calcolare $\mathbb{P}(X + Y > 0)$.

4) Siano $U = \max(X, Y)$ e $V = |XY|$. Calcolare le leggi congiunte e marginali di U e V.

Soluzione

1. Dalle condizioni sulla media di X e Y otteniamo direttamente

$$p_X(1) = p_X(-1), \qquad p_Y(1) = p_Y(-1),$$

mentre da quelle sulla varianza otteniamo

$$p_X(1) + p_X(-1) = 1, \qquad p_Y(1) + p_Y(-1) = 1/2,$$

da cui seguono

$$p_X(1) = p_X(-1) = 1/2, \qquad p_Y(1) = p_Y(-1) = 1/4$$

e quindi anche

$$p_X(0) = 0, \qquad p_Y(0) = 1/2.$$

La legge congiunta si ottiene sfruttando l'indipendenza e quindi utilizzando il fatto che $p_{(X,Y)}(i, j) = p_X(i)p_Y(j)$. Per riassumere:

X \ Y	-1	0	1	p_X
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
p_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

.

2. Per l'indipendenza di X, Y e per la linearità del valore atteso otteniamo

$$\mathbb{E}[(4X+1)(Y-3)] = \mathbb{E}[(4X+1)]\mathbb{E}[(Y-3)] = (4\mathbb{E}[(X]+1)(\mathbb{E}[Y]-3) = 1(-3) = -3.$$

3. Abbiamo

$$\{X+Y>0\} = \{(X,Y)=(0,1)\} \cup \{(X,Y)=(1,0)\} \cup \{(X,Y)=(1,1)\},$$

e quindi

$$\mathbb{P}(X+Y>0) = p_{(X,Y)}(0,1) + p_{(X,Y)}(1,0) + p_{(X,Y)}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

4. Vale

$$\mathcal{S}_U = \{-1,0,1\}, \qquad \mathcal{S}_V = \{0,1\}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\{(U,V)=(-1,0)\} = \emptyset,\\
&\{(U,V)=(-1,1)\} = \{(X,Y)=(-1,-1)\},\\
&\{(U,V)=(0,0)\} = \{(X,Y)=(-1,0)\} \cup \{(X,Y)=(0,-1)\} \cup \{(X,Y)=(0,0)\},\\
&\{(U,V)=(0,1)\} = \emptyset,\\
&\{(U,V)=(1,0)\} = \{(X,Y)=(1,0)\} \cup \{(X,Y)=(0,1)\},\\
&\{(U,V)=(1,1)\} = \{(X,Y)=(1,1)\} \cup \{(X,Y)=(-1,1)\} \cup \{(X,Y)=(1,-1)\}.
\end{aligned}$$

Quindi, dalla legge di (X,Y) otteniamo

$U \backslash V$	0	1	p_U
-1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$
p_V	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

.

Esercizio 4

Si consideri la funzione definita da

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - c/x, & x \geq 1. \end{cases}$$

1) Determinare i valori ammissibili per $c \in \mathbb{R}$ affinché F_X sia la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria X.

2) Determinare il valore di c per cui X è una variabile aleatoria continua e determinarne la sua densità f_X.

3) Calcolare $\mathbb{P}(X \geq 1)$ e $\mathbb{P}(|X| > 2)$.

4) Sia Y la variabile aleatoria continua $Y = |X - 2|$. Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Soluzione

1. I limiti
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1 \tag{0.1}$$
sono verificati per ogni valore di $c \in \mathbb{R}$. Lo stesso è vero per la continuità da destra. Controlliamo che $F_X(x) \in [0,1]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo è vero se e solo se $c/x \in [0,1]$ per ogni $x \geq 1$, che è verificata se e solo se $c \in [0,1]$. Inoltre, per tali valori di c, F_X risulta monotona non decrescente, e quindi F_X è una funzione di ripartizione.

2. Affinché X sia continua, $F_X(x)$ deve essere continua per ogni x in $\mathbb{R}$. Nel nostro caso, questo è vero se F_X è continua in 1. Questo è equivalente a $F_X(1) = 0$, che è verificata se e solo se $c = 1$. La densità si ottiene facendo la derivata di F_X dove essa è derivabile e assegnando un valore arbitrario dove non è:
$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 1, \\ c/x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

3. La prima è data da
$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \lim_{x\to 1^-} F_X(x) = 1.$$
Per la seconda abbiamo
$$\mathbb{P}(|X| > 2) = \mathbb{P}(X < -2) + \mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - c/2) = c/2.$$

4. Affinché Y sia continua lo deve essere anche X, perciò poniamo $c = 1$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x-2| f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{2} (2-x) f_X(x)dx + \int_{2}^{+\infty} (x-2) f_X(x)dx \\ &= \int_1^2 \frac{2-x}{x^2}dx + \int_2^{+\infty} \frac{x-2}{x^2}dx \\ &= \Big[-2x^{-1} - \ln x\Big]_1^2 + \Big[\ln x + 2x^{-1}\Big]_2^{\infty} = +\infty.\end{aligned}$$