ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
24 gennaio 2023

Esercizio 1

Una confezione di palle da biliardo ne contiene 7, numerate da 1 a 7. Queste vengono ripartite in modo casuale fra 3 scatole, numerate da 1 a 3. I possibili esiti dell'operazione sono quindi dati da vettori $\omega = (s_1, \ldots, s_7)$, dove $s_i \in \{1, 2, 3\}$ è la scatola in cui viene riposta la palla numero i.

1) Introdurre lo spazio campionario Ω con cui si intende risolvere il problema. Si scelga Ω finito e con esiti equiprobabili. Qual è la cardinalità di Ω?

2) Si calcoli la probabilità che le palle vengano riposte tutte in una stessa scatola.

3) Si calcoli la probabilità che due palle siano nella scatola 1 e tre palle siano nella scatola 2 (quindi due palle sono nella scatola 3).

4) Si calcoli la probabilità che le palle di indice dispari siano nella scatola 2.

Soluzione

1) $\Omega = \mathbf{DR}_{3,7}$, quindi $|\Omega| = 3^7 = 2187$.

2) L'evento di cui è richiesta la probabilità è

$$A \;=\; \big\{(1,\dots,1),(2,\dots,2),(3,\dots,3)\big\}.$$

Quindi $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729} \approx 0.137\%$.

3) Sia $B =$ "due palle sono nella scatola 1 e tre palle sono nella scatola 2". Determiniamo $|B|$ con le seguenti scelte successive:

- scelta delle due palle che sono nella scatola 1, ossia scelta di i e j, $i \neq j$, tali che nel vettore $\omega = (s_1,\dots,s_7)$ si ha $s_i = 1$ e $s_j = 1$: $\binom{7}{2}$ possibilità;
- scelta delle tre palle (tra le cinque rimaste) che sono nella scatola 2: $\binom{5}{3}$ possibilità.

Quindi

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{3}}{3^7} \;=\; \frac{70}{729} \;\approx\; 9.6\%.$$

4) Sia $C =$ "le palle di indice dispari sono nella scatola 2". Determiniamo $|C|$ con le seguenti scelte successive:

- scelta delle scatole in cui si trovano le palle con indice pari: $|\mathbf{DR}_{3,3}| = 3^3 = 27$ possibilità.

Quindi

$$\mathbb{P}(C) \;=\; \frac{3^3}{3^7} \;=\; \frac{1}{81} \;\approx\; 1.2\%.$$

Esercizio 2

Consideriamo una moneta equilibrata e un'urna contenente cinque palline: tre blu e due rosse. Si lancia la moneta e si procede come segue:

- se esce testa, si estraggono (simultaneamente) due palline dall'urna;
- se esce croce, si estraggono (simultaneamente) tre palline dall'urna.

Siano

$$\begin{aligned} X &= \text{“vale 2 se esce testa, vale 3 se esce croce”}, \\ Y &= \text{“n}^{\text{o}}\text{ palline blu estratte dall'urna”}. \end{aligned}$$

1) Determinare densità discreta congiunta e marginali di X e Y

2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathrm{Cov}(X, Y)$?

3) X e Y sono indipendenti?

4) Calcolare $\mathbb{P}(Y = X)$.

Soluzione

1) Abbiamo che $\mathcal{S}_X = \{2,3\}$ e $\mathcal{S}_Y = \{0,1,2,3\}$. Per quanto riguarda la densità discreta congiunta, si calcola con la regola della catena. Ad esempio

$$p_{(X,Y)}(2,1) \;=\; \mathbb{P}(X=2,Y=1) \;=\; \mathbb{P}(Y=1|X=2)\,\mathbb{P}(X=2) \;=\; \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}.$$

In generale, otteniamo la seguente tabella:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	p_X
2	$\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}$	0	
3	0	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{1}{2}$	
p_Y					1

Quindi, svolgendo i conti, otteniamo:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	p_X
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	0	$\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$
p_Y	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_i x_i\, p_X(x_i) \;=\; \frac{5}{2},\\
\mathbb{E}[Y] &= \sum_j y_j\, p_Y(y_j) \;=\; \frac{3}{2},\\
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{(X,Y)}(x_i,y_j) \;=\; \frac{39}{10},\\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \;=\; \frac{3}{20} \;=\; 0.15.
\end{aligned}$$

3) No, infatti una condizione necessaria per l'indipendenza è che la covarianza sia uguale a zero, mentre dal punto precedente sappiamo che $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.15$.

4) Si ha che

$$\mathbb{P}(Y=X) \;=\; \sum_{i,j\colon x_i=y_j} p_{(X,Y)}(x_i,y_j) \;=\; p_{(X,Y)}(2,2) + p_{(X,Y)}(3,3) \;=\; \frac{1}{5} \;=\; 20\%.$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

1) Determinare la densità f_X della variabile aleatoria X.

2) Calcolare $\mathbb{P}(X \geq 2)$ e $\mathbb{E}[X]$.

Si consideri la variabile aleatoria

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se } X \leq 1, \\ X + 1, & \text{se } X > 1. \end{cases}$$

3) Calcolare la probabilità che simultaneamente $Y \leq 3$ e $X > 1$.

4) Calcolare $\mathbb{P}(Y \leq 3)$.

Soluzione

1) Si ha che

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x^3}, & x > 1, \end{cases}$$

dove abbiamo posto arbitrariamente $f_X(0) = 0$ e $f_X(1) = \frac{1}{2}$.

2)

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \;=\; 1 - F_X(2) \;=\; \frac{1}{8},$$

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_0^1 \frac{1}{2} x \,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{5}{4}.$$

3) Dobbiamo calcolare la probabilità $\mathbb{P}(Y \leq 3, X > 1)$. Si ha che

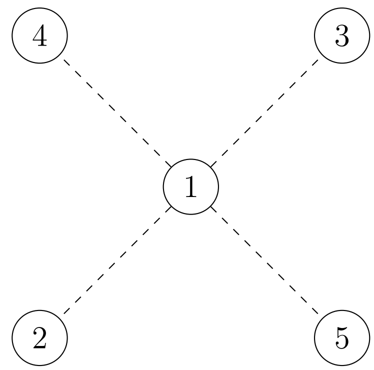
$$\mathbb{P}(Y \leq 3, X > 1) \;=\; \mathbb{P}(X + 1 \leq 3, X > 1) \;=\; \mathbb{P}(1 < X \leq 2) \;=\; F_X(2) - F_X(1) \;=\; \frac{3}{8}.$$

4) Si noti che l'evento $\{Y \leq 3\}$ si verifica se e solo se si verifica l'evento $\{X \leq 1\}$ oppure l'evento $\{X + 1 \leq 3\} \cap \{X > 1\}$. Poiché gli eventi $\{X \leq 1\}$ e $\{X + 1 \leq 3\} \cap \{X > 1\}$ sono disgiunti, per la proprietà di additività otteniamo

$$\mathbb{P}(Y \leq 3) \;=\; \mathbb{P}(X \leq 1) + \mathbb{P}(X + 1 \leq 3, X > 1) \;=\; F_X(1) + \frac{3}{8} \;=\; \frac{7}{8}.$$

Esercizio 4

Un bambino saltella tra cinque sassi, numerati da 1 a 5, disposti come in figura:



Inizialmente si trova nel sasso 1. A ogni istante, lancia un dado regolare a sei facce: se il risultato del lancio corrisponde a un sasso connesso da una linea tratteggiata al sasso su cui si trova, ci salta; in caso contrario, resta nella sua posizione. Descriviamo il moto del bambino con una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ in cui

$$X_n \;=\; \text{“n}^{\text{o}}\text{ del sasso su cui si trova il bambino all'istante } n\text{”}, \qquad n \geq 1.$$

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

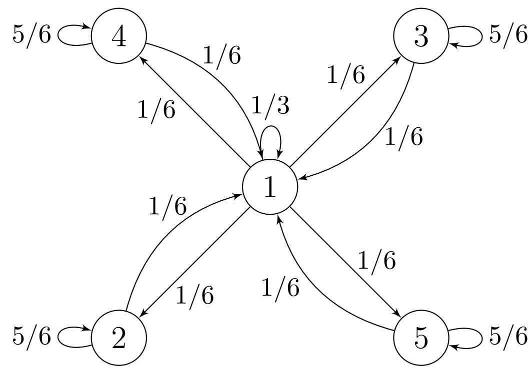
3) Calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 4)$.

4) Trovare l'unica distribuzione invariante.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$



2) C'è un'unica classe comunicante, che è quindi $\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5\}$. La catena di Markov è dunque irriducibile.

3) Sappiamo che $X_1 = 1$, quindi

$$\mathbb{P}(X_3 = 4) \;=\; \sum_{i=1}^{5} p_{X_1}(i)\,\pi_{i4}^{(2)} \;=\; \pi_{14}^{(2)}.$$

Si ha che

$$\pi_{14}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{prob. cammino } 1\to1\to4} \;+\; \underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}_{\text{prob. cammino } 1\to4\to4} \;=\; \frac{7}{36} \;\approx\; 19.4\%.$$

Quindi $\mathbb{P}(X_3 = 4) \approx 19.4\%$.

4) Ricordiamo che una distribuzione invariante è un vettore riga $\vec{\boldsymbol{\pi}} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ tale che

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \vec{\boldsymbol{\pi}}\,\Pi \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{5} \pi_i \;=\; 1.$$

Queste due uguaglianze corrispondono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \pi_1 \;=\; \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{6}\pi_2 + \frac{1}{6}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_4 + \frac{1}{6}\pi_5 \\ \pi_2 \;=\; \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{5}{6}\pi_2 \\ \pi_3 \;=\; \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{5}{6}\pi_3 \\ \pi_4 \;=\; \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{5}{6}\pi_4 \\ \pi_5 \;=\; \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{5}{6}\pi_5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = \; 1. \end{cases}$$

Le equazioni dalla seconda alla penultima, diventano:

$$\pi_2 \;=\; \pi_1, \qquad \pi_3 \;=\; \pi_1, \qquad \pi_4 \;=\; \pi_1, \qquad \pi_5 \;=\; \pi_1.$$

Quindi necessariamente $\pi_i = \frac{1}{5}$, per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Perciò

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right).$$