ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
10 gennaio 2023

Esercizio 1

Un segnale può assumere due stati: positivo (+) o negativo ($-$). Il segnale viene inizialmente trasmesso nello stato +, quindi attraversa due canali successivi, infine viene ricevuto. Ciascun canale trasmette correttamente con probabilità del 90%, altrimenti lo inverte (se era + diventa $-$, e viceversa). I canali agiscono indipendentemente.

a) Qual è la probabilità che entrambi i canali trasmettano correttamente il segnale?

b) Qual è la probabilità che entrambi i canali invertano il segnale?

c) Qual è la probabilità che il segnale venga ricevuto correttamente (ossia nello stato +)?

d) Se il segnale viene ricevuto correttamente, qual è la probabilità che il primo canale lo abbia trasmesso correttamente?

Soluzione

Introduciamo gli eventi

$$\begin{aligned}
A_1 &= \text{“il primo canale trasmette il segnale correttamente”},\\
A_2 &= \text{“il secondo canale trasmette il segnale correttamente”},\\
B &= \text{“entrambi i canali trasmettono correttamente il segnale”} \;=\; A_1 \cap A_2,\\
C &= \text{“entrambi i canali invertono il segnale”} \;=\; A_1^c \cap A_2^c,\\
D &= \text{“il segnale viene ricevuto correttamente”}.
\end{aligned}$$

Notiamo che

$$D \;=\; (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c),$$

infatti il segnale viene ricevuto correttamente quando entrambi i canali lo trasmettono correttamente oppure quando entrambi lo invertono.

1) Dal testo dell'esercizio sappiamo che $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 0.9$ e inoltre A_1 e A_2 sono indipendenti, quindi

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \;=\; \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2) \;=\; (0.9)^2 \;=\; 81\%.$$

2) Poiché A_1 e A_2 sono indipendenti, anche A_1^c e A_2^c lo sono, pertanto

$$\mathbb{P}(C) \;=\; \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) \;=\; \mathbb{P}(A_1^c)\,\mathbb{P}(A_2^c) \;=\; (0.1)^2 \;=\; 1\%.$$

3) Abbiamo che

$$\mathbb{P}(D) \;=\; \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) \;=\; 82\%.$$

4) Dalla definizione di probabilità condizionata, otteniamo

$$\mathbb{P}(A_1|D) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap D)}{\mathbb{P}(D)}.$$

Notiamo che

$$A_1 \cap D \;=\; A_1 \cap A_2.$$

Quindi

$$\mathbb{P}(A_1|D) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(D)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(D)} \;=\; \frac{81}{82} \;\approx\; 98.8\%.$$

Esercizio 2

Si lanciano due dadi a *quattro* facce equilibrati. Siano X e Y i risultati ottenuti. Poniamo quindi

$$Z = |X - Y|.$$

1) Determinare congiunta e marginali di X e Y.

2) Determinare congiunta e marginali di X e Z.

3) X e Z sono indipendenti?

4) Calcolare $\mathbb{E}[X - 2Z]$.

Soluzione

1) Utilizzando l'indipendenza di X e Y, si ottiene la seguente tabella:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	p_X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
p_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

2) La tabella della congiunta (e delle marginali) di X e Z è la seguente:

$X \backslash Z$	0	1	2	3	p_X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
p_Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

3) No, infatti ad esempio

$$p_{(X,Z)}(2,1) \ = \ \frac{1}{8} \ \neq \ \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \ = \ p_X(2)\, p_Z(1).$$

4) Per la linearità del valore atteso, abbiamo che

$$\mathbb{E}[X - 2Z] \ = \ \mathbb{E}[X] - 2\,\mathbb{E}[Z] \ = \ \frac{5}{2} - 2\,\frac{5}{4} \ = \ 0.$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2}{3}\log\left(\frac{3}{2}\right) x, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ \log x, & \frac{3}{2} \leq x \leq 2, \\ 1-(1-\log 2)\,\mathrm{e}^{-(x-2)}, & x \geq 2, \end{cases}$$

dove $\log x$ indica il logaritmo in base e di x.

1) Calcolare $\mathbb{P}(1 < X \leq 7/4)$.

2) Determinare la densità f_X della variabile aleatoria X.

Si consideri la variabile aleatoria discreta

$$Y \;=\; \begin{cases} 2, & \text{se } X \leq 7/4, \\ 5, & \text{se } X > 7/4. \end{cases}$$

3) Determinare supporto e densità discreta di Y.

Si consideri la variabile aleatoria continua

$$Z \;=\; 3X+4.$$

4) Determinare la funzione di ripartizione di Z.

Soluzione

1)
$$\mathbb{P}(1 < X \le 7/4) \;=\; F_X(7/4) - F_X(1) \;=\; \log\!\left(\tfrac{7}{4}\right) - \tfrac{2}{3}\log\!\left(\tfrac{3}{2}\right) \;\approx\; 28.93\%.$$

2) Si ha che
$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{2}{3}\log\!\left(\frac{3}{2}\right), & 0 < x \le \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x}, & \frac{3}{2} < x \le 2, \\ (1-\log 2)\,\mathrm{e}^{-(x-2)}, & x > 2, \end{cases}$$
dove abbiamo posto arbitrariamente $f_X(0) = 0$, $f_X(3/2) = \frac{2}{3}\log\!\left(\frac{3}{2}\right)$, $f_X(2) = \frac{1}{2}$.

3) $\mathcal{S}_Y = \{2, 5\}$, inoltre
$$\mathbb{P}(Y = 2) \;=\; \mathbb{P}(X \le 7/4) \;=\; F_X(7/4) \;=\; \log(7/4) \;\approx\; 55.96\%.$$
Poiché $\mathbb{P}(Y = 5) = 1 - \mathbb{P}(Y = 2)$, si ottiene la seguente tabella della densità discreta di Y:

Y	2	5
p_Y	$\log(7/4)$	$1 - \log(7/4)$

4) Abbiamo che
$$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}(Z \le x) \;=\; \mathbb{P}(3X + 4 \le x) \;=\; \mathbb{P}\!\left(X \le \tfrac{x-4}{3}\right) \;=\; F_X\!\left(\tfrac{x-4}{3}\right).$$
Quindi
$$F_Z(x) \;=\; \begin{cases} 0, & \frac{x-4}{3} \le 0, \\ \frac{2}{3}\log\!\left(\frac{3}{2}\right)\frac{x-4}{3}, & 0 \le \frac{x-4}{3} \le \frac{3}{2}, \\ \log\!\left(\frac{x-4}{3}\right), & \frac{3}{2} \le \frac{x-4}{3} \le 2, \\ 1 - (1-\log 2)\,\mathrm{e}^{-(\frac{x-4}{3}-2)}, & \frac{x-4}{3} \ge 2 \end{cases} \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 4, \\ \frac{2}{9}\log\!\left(\frac{3}{2}\right)(x-4), & 4 \le x \le \frac{17}{2}, \\ \log\!\left(\frac{x-4}{3}\right), & \frac{17}{2} \le x \le 10, \\ 1 - (1-\log 2)\,\mathrm{e}^{-(\frac{x-10}{3})}, & x \ge 10. \end{cases}$$

Esercizio 4

Consideriamo una scalinata costituita da cinque scalini, etichettati (dal basso verso l'alto) con i numeri $1, 2, 3, 4, 5$. Una persona si trova alla base della scalinata, quindi sullo scalino numero 1. A ogni istante, si lancia una moneta equilibrata: se esce testa, la persona sale di un gradino (se si trova nel quinto scalino, in tal caso resta nel quinto), mentre se esce croce ritorna al gradino di partenza, il numero 1 (se si trova già nel primo scalino, in tal caso resta nel primo). Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ con

$$X_n \;=\; \text{“n}^{\text{o}}\text{ dello scalino occupato all'istante } n\text{”}, \qquad n \geq 1.$$

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

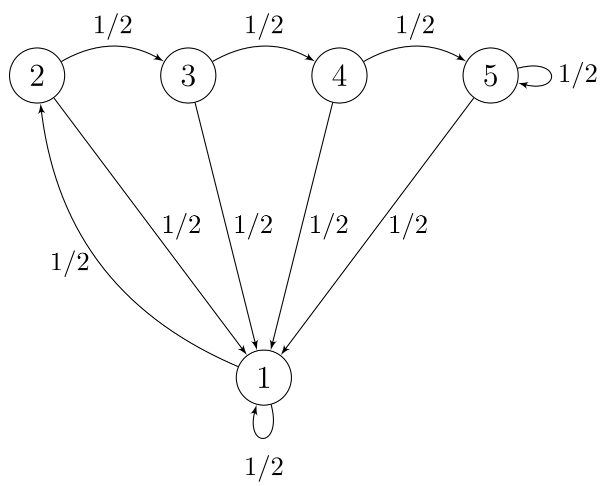
2) Quali sono le classi comunicanti?

3) Calcolare la probabilità di passare dallo stato 3 allo stato 5 in tre passi.

4) Trovare l'unica distribuzione invariante.

1) $\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



2) C'è un'unica classe comunicante, che è quindi $\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5\}$. La catena di Markov è dunque irriducibile.

3) Abbiamo che

$$\pi_{35}^{(3)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 3\to4\to5\to5} \;=\; \frac{1}{8} \;=\; 12.5\%.$$

4) Ricordiamo che una distribuzione invariante è un vettore riga $\vec{\boldsymbol{\pi}} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ tale che

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \vec{\boldsymbol{\pi}}\,\Pi \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{5} \pi_i \;=\; 1.$$

Queste due uguaglianze corrispondono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \pi_1 \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\pi_i \\ \pi_2 \;=\; \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 \;=\; \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_4 \;=\; \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_5 \;=\; \frac{1}{2}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 \;=\; 1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione (ricordando che $\sum_i \pi_i = 1$), otteniamo $\pi_1 = \frac{1}{2}$. Quindi

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right).$$