ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
14 settembre 2022

Esercizio 1

Siano $n \in \mathbb{N}$, $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e

$$\mathbf{P}_n = \big\{(x_1, \dots, x_n) \colon x_i \in E, \text{ con } x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\big\}$$

l'insieme delle permutazioni dei numeri naturali $1, 2, \dots, n$. Una permutazione $(x_1, \dots, x_n)$ ha $i \in E$ come punto fisso se $x_i = i$. Sia

$$A_i \;=\; \text{“la permutazione ha come punto fisso } i\text{”}.$$

Consideriamo un'urna contenente n palline numerate da 1 a n, da cui si effettuano n estrazioni senza reimmissione.

1) Qual è la probabilità che l'i-esima pallina estratta sia la numero i?

2) Qual è la probabilità che l'i-esima pallina estratta sia la numero i e la j-esima estratta sia la numero j, con $i \neq j$? Gli eventi “l'i-esima pallina estratta è la numero i” e “la j-esima pallina estratta è la numero j”, con $i \neq j$, sono indipendenti?

Soluzione

1) Viene chiesta la probabilità $\mathbb{P}(A_i)$. Scegliendo come spazio campionario $\Omega = \mathbf{P}_n$, resta da calcolare la cardinalità di A_i. Notiamo che una permutazione con i come punto fisso equivale ad una permutazione dei restanti $n-1$ elementi. Quindi $|A_i| = (n-1)!$, dunque
$$\mathbb{P}(A_i) \;=\; \frac{(n-1)!}{n!} \;=\; \frac{1}{n}.$$

2) Viene chiesta la probabilità $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$. Procedendo come nel punto precedente si deduce che $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, quindi
$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \;=\; \frac{(n-2)!}{n!} \;=\; \frac{1}{n(n-1)} \;\neq\; \frac{1}{n^2} \;=\; \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

   Perciò A_i e A_j non sono indipendenti.

Esercizio 2

Siano X ed Y due variabili aleatorie discrete con densità discreta congiunta e densità marginali date da

$X \backslash Y$	0	2	4	6	p_X
0	0.2	0.1	0.2	0	0.5
3	0.1	0	0.1	0.2	0.4
7	0	0.1	0	0	0.1
p_Y	0.3	0.2	0.3	0.2	1

1) X e Y sono indipendenti?

2) Quanto valgono $\mathbb{P}(X < Y)$ e $\mathbb{P}(XY > 0)$?

3) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$ e $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Sia ora Z la variabile aleatoria discreta data da $Z = XY$.

4) Determinare la densità discreta di Z.

Soluzione

1) No, infatti ad esempio $p_{(X,Y)}(0,0) \neq p_X(0)\, p_Y(0)$.

2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= p_{(X,Y)}(0,2) + p_{(X,Y)}(0,4) + p_{(X,Y)}(0,6) + p_{(X,Y)}(3,4) + p_{(X,Y)}(3,6) \;=\; 0.6, \\ \mathbb{P}(XY > 0) &= p_{(X,Y)}(3,2) + p_{(X,Y)}(3,4) + p_{(X,Y)}(3,6) \\ &\quad + p_{(X,Y)}(7,2) + p_{(X,Y)}(7,4) + p_{(X,Y)}(7,6) \;=\; 0.4. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 0 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.1 \;=\; 1.9, \\ \mathbb{E}[Y] &= 0 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.3 + 6 \cdot 0.2 \;=\; 2.8, \\ \mathbb{E}[XY] &= \sum_{\substack{i=0,3,7 \\ j=0,2,4,6}} i\, j\, p_{(X,Y)}(i,j) \\ &= 3 \cdot 4 \cdot p_{(X,Y)}(3,4) + 3 \cdot 6 \cdot p_{(X,Y)}(3,6) + 7 \cdot 2 \cdot p_{(X,Y)}(7,2) \;=\; 6.2, \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] \;=\; 0.88. \end{aligned}$$

4)

Z	0	6	12	14	18	28	42
p_Z	0.6	0	0.1	0.1	0.2	0	0

Esercizio 3

Supponiamo che X abbia legge esponenziale di parametro 2, ovvero X è una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2\,\mathrm{e}^{-2\,x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Sia inoltre

$$Z \;=\; \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-2X}}.$$

1) Qual è la funzione di ripartizione di X?

2) Calcolare $\mathbb{E}[Z]$.

3) Mostrare che $\mathbb{P}(Z \leq 1/2) = 0$ e $\mathbb{P}(Z \leq 1) = 1$.

4) Determinare la funzione di ripartizione di Z.

SOLUZIONE

1)

$$F_X(t) \;=\; \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-2\,t}, & t \ge 0. \end{cases}$$

2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] \;=\; \mathbb{E}\bigg[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2X}}\bigg] \;&=\; \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{-2\,x}}{1+\mathrm{e}^{-2\,x}}\,\mathrm{d}x \\ &=\; \Big[-\log\big(1+\mathrm{e}^{-2\,x}\big)\Big]_0^{+\infty} \;=\; \log 2. \end{aligned}$$

3) Notiamo che la funzione $x \mapsto 1/(1+\mathrm{e}^{-2x})$, per $x \ge 0$, è sempre positiva e prende valori nell'intervallo $[1/2, 1)$. Deduciamo quindi che $\mathbb{P}(Z \le 1/2) = 0$ e $\mathbb{P}(Z \le 1) = 1$.

4) Dal punto precedente, sappiamo che $F_Z(1/2) = 0$ ed $F_Z(1) = 1$. Dalla monotonia della funzione di ripartizione, segue che

$$F_Z(t) \;=\; 0, \qquad \forall\, t \le \frac{1}{2}, \qquad\qquad F_Z(t) \;=\; 1, \qquad \forall\, t \ge 1.$$

Sia ora $t \in (1/2, 1)$, allora

$$\begin{aligned} F_Z(t) \;=\; \mathbb{P}\bigg(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2X}} \le t\bigg) \;=\; \mathbb{P}\bigg(\mathrm{e}^{-2X} \ge \frac{1}{t} - 1\bigg) \;&=\; \mathbb{P}\bigg(-2X \ge \log\bigg(\frac{1}{t} - 1\bigg)\bigg) \\ &=\; \mathbb{P}\bigg(X \le -\frac{1}{2}\log\bigg(\frac{1}{t} - 1\bigg)\bigg) \\ &=\; \mathbb{F}_X\bigg(-\frac{1}{2}\log\bigg(\frac{1}{t} - 1\bigg)\bigg). \end{aligned}$$

Quindi

$$F_Z(t) \;=\; \begin{cases} 0, & t \le 1/2, \\ 1 - \mathrm{e}^{\log(\frac{1}{t}-1)}, & 1/2 < t < 1, \\ 1, & t \ge 1, \end{cases} \;=\; \begin{cases} 0, & t \le 1/2, \\ 2 - \frac{1}{t}, & 1/2 < t < 1, \\ 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

Esercizio 4

Consideriamo quattro palline e due urne, A e B. All'inizio si inseriscono tre palline nell'urna A e una pallina nell'urna B. Dopodiché si sceglie una pallina a caso, la si toglie dalla sua urna e la si inserisce nell'altra. Sia

$$X_n \;=\; \text{“numero di palline presenti nell'urna } A \text{ dopo l'}n\text{-esimo scambio”}, \qquad \forall\, n \geq 1,$$

e sia $X_0 = 3$. La successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n \geq 0}$ è una catena di Markov a tempo discreto.

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

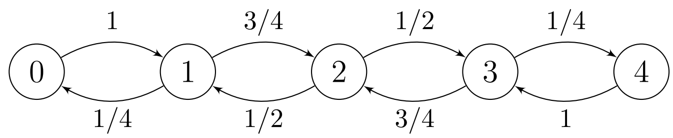
3) Calcolare $\pi_{14}^{(3)}$.

4) Trovare l'unica distribuzione invariante.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{0,1,2,3,4\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



2) La catena di Markov è irriducibile, ovvero esiste un'unica classe comunicante che è dunque $\{0,1,2,3,4\}$.

3)

$$\pi_{14}^{(3)} \;=\; \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 1\to 2\to 3\to 4} \;=\; \frac{3}{32} \;=\; 9.375\%.$$

4) Ricordiamo che una distribuzione invariante è un vettore riga $\vec{\boldsymbol{\pi}} = (\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5)$ tale che

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \vec{\boldsymbol{\pi}}\,\Pi \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{5} \pi_i \;=\; 1.$$

Queste due uguaglianze corrispondono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \pi_1 \;=\; \frac{1}{4}\pi_2 \\ \pi_2 \;=\; \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_3 \;=\; \frac{3}{4}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_4 \\ \pi_4 \;=\; \frac{1}{2}\pi_3 + \pi_5 \\ \pi_5 \;=\; \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5 = \; 1. \end{cases}$$

Ponendo $\pi_1 = x$, dalla prima equazione si ottiene $\pi_2 = 4x$. Dalla seconda equazione si ottiene $\pi_3 = 6x$. Dopodiché, dalla terza equazione si ottiene $\pi_4 = 4x$. Infine, dall'equazione $\pi_5 = \frac{1}{4}\pi_4$ (o, equivalentemente, dall'equazione $\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3 + \pi_5$) otteniamo $\pi_5 = x$. Per determinare l'incognita x, utilizziamo l'ultima equazione, ottenendo

$$x + 4x + 6x + 4x + x \;=\; 1.$$

Quindi $x = \frac{1}{16}$. Perciò

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right).$$