ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
11 luglio 2022

Esercizio 1

Un'urna contiene due carte: una di esse ha entrambi i lati rossi, mentre l'altra ha un lato rosso e uno blu. L'esperimento aleatorio consiste nell'estrarre una carta e guardare, in un primo tempo, solo un lato. Dopo aver segnato il colore di questo lato, si gira la carta e si guarda il colore dell'altro lato.

1) Qual è la probabilità di estrarre la carta con entrambi i lati rossi?

2) Una carta viene estratta e se ne guarda uno solo dei lati. Qual è la probabilità che sia rosso?

3) Si descriva l'esperimento aleatorio tramite un opportuno diagramma ad albero.

4) Sapendo che il primo lato è rosso, qual è la probabilità che anche il secondo lato sia rosso?

Soluzione

1) Consideriamo gli eventi:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“la carta estratta ha entrambi i lati rossi”}, \\
A^c &= \text{“la carta estratta ha i lati di colore diverso”}, \\
R_1 &= \text{“il primo lato è rosso”}, \\
B_1 &= \text{“il primo lato è blu”} \;=\; R_1^c, \\
R_2 &= \text{“il secondo lato è rosso”}, \\
B_2 &= \text{“il secondo lato è blu”} \;=\; R_2^c.
\end{aligned}
$$

Si ha che

$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{1}{2}.$$

2) Si ha che

$$\mathbb{P}(R_1) \;=\; \mathbb{P}(A \cap R_1) + \mathbb{P}(A^c \cap R_1) \;=\; \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(R_1|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(R_1|A^c) \;=\; \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{3}{4}.$$

3) Relativamente agli eventi introdotti nel punto 1), otteniamo il seguente diagramma ad albero:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & R_2 \\
 & & R_1 \arrow[ur, "\mathbb{P}(R_2|A \cap R_1) = 1"] \arrow[dr, "\mathbb{P}(B_2|A \cap R_1) = 0"'] & \\
 & & & B_2 \\
 & A \arrow[uur, "\mathbb{P}(R_1|A) = 1"] \arrow[dr, "\mathbb{P}(B_1|A) = 0"'] & & \\
 & & B_1 & \\
\Omega \arrow[uur, "\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}"] \arrow[ddr, "\mathbb{P}(A^c) = \frac{1}{2}"'] & & & \\
 & & R_1 \arrow[r, "\mathbb{P}(B_2|A^c \cap R_1) = 1"] & B_2 \\
 & A^c \arrow[ur, "\mathbb{P}(R_1|A^c) = \frac{1}{2}"] \arrow[dr, "\mathbb{P}(B_1|A^c) = \frac{1}{2}"'] & & \\
 & & B_1 \arrow[r, "\mathbb{P}(R_2|A^c \cap B_1) = 1"'] & R_2
\end{tikzcd}
$$

4) Dalla definizione di probabilità condizionata, otteniamo

$$\mathbb{P}(R_2|R_1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_1)}.$$

Resta da calcolare il numeratore. Utilizzando la formula delle probabilità totali e la regola di moltiplicazione, si ottiene (si noti che $\mathbb{P}(A^c \cap R_1 \cap R_2) = 0$)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \;&=\; \mathbb{P}(A \cap R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(A^c \cap R_1 \cap R_2) \\
&=\; \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(R_1|A)\mathbb{P}(R_2|A \cap R_1) \;=\; \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Quindi $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{2}{3}$.

Esercizio 2

Sia λ un parametro reale fissato. Sia inoltre X una variabile aleatoria discreta avente supporto $\mathcal{S}_X = \{0, \lambda^2\}$ e densità discreta data da

$$p_X(0) \; = \; \frac{2}{\lambda}, \qquad p_X(\lambda^2) \; = \; 1 - \frac{2}{\lambda}.$$

1) Trovare i valori ammissibili di λ affinché p_X sia effettivamente una densità discreta.
2) Calcolare media e varianza di X.
3) Sia Y una variabile aleatoria con la stessa legge di X, ma indipendente da X. Determinare densità discreta congiunta e densità marginali di X e Y.
4) Calcolare $\mathbb{E}[XY]$ e $\mathrm{Var}(X+Y)$.

Soluzione

1) Le quantità $2/\lambda$ e $1-2/\lambda$ sono probabilità, quindi devono essere comprese tra 0 ed 1; inoltre la loro somma deve fare 1. Devono essere dunque verificate le condizioni seguenti:

$$0 \;\le\; \frac{2}{\lambda} \;\le\; 1, \qquad 0 \;\le\; 1-\frac{2}{\lambda} \;\le\; 1, \qquad p_X(0)+p_X(\lambda^2) \;=\; 1,$$

da cui si ottiene $\lambda \ge 2$.

2) $\mathbb{E}[X] = \lambda(\lambda-2)$ e $\mathrm{Var}(X) = 2\lambda^2(\lambda-2)$.

3)

$X \backslash Y$	0	λ^2	p_X
0	$\frac{4}{\lambda^2}$	$\frac{2}{\lambda}\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)$	$\frac{2}{\lambda}$
λ^2	$\frac{2}{\lambda}\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)$	$\left(1-\frac{2}{\lambda}\right)^2$	$1-\frac{2}{\lambda}$
p_Y	$\frac{2}{\lambda}$	$1-\frac{2}{\lambda}$	1

4) Per l'indipendenza, si ha che

$$\mathbb{E}[XY] \;=\; \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y], \qquad\qquad \mathrm{Cov}(X,Y) \;=\; 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] \;&=\; \lambda^2(\lambda-2)^2, \\ \mathrm{Var}(X+Y) \;&=\; \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y) \;=\; 4\lambda^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \; = \; \begin{cases} \frac{2}{3}\big(1-\frac{x}{3}\big), & 0<x<3, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1) Quanto vale $\mathbb{P}(X \geq 1)$?

2) Determinare la funzione di ripartizione di X.

3) Calcolare $\mathbb{E}[X^p]$ per qualunque $p \geq 1$.

4) Qual è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $Y = 3 - X$?

Soluzione

1) $\mathbb{P}(X \geq 1) = \int_1^3 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{9}$.

2)

$$F_X(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t}{3}\big(2 - \frac{t}{3}\big), & 0 \leq t \leq 3, \\ 1 & t \geq 3. \end{cases}$$

3)

$$\mathbb{E}[X^p] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^p\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^3 x^p\, \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x \;=\; \frac{2 \cdot 3^p}{(p+1)(p+2)}.$$

4) La funzione di ripartizione di Y è data da

$$F_Y(t) \;=\; \mathbb{P}(3 - X \leq t) \;=\; \mathbb{P}(X \geq 3 - t) \;=\; 1 - F_X(3-t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$F_Y(t) \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1 - \frac{3-t}{3}\big(2 - \frac{3-t}{3}\big), & 0 \leq t \leq 3, \\ 1 & t \geq 3, \end{cases} \;=\; \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t^2}{3^2}, & 0 \leq t \leq 3, \\ 1 & t \geq 3. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si consideri un gioco da tavolo in cui una pedina si muove su un tabellone con cinque caselle, numerate da 0 a 4. Per i movimenti si utilizzano quattro monete non truccate, recanti sulle due facce le scritte *zero* e *quattro*, secondo le seguenti regole.

- Si parte dalla casella 1.
- Si vince raggiungendo la casella 4.
- Si perde raggiungendo la casella 0.

Se la pedina è su una casella, il movimento successivo è deciso in base alle seguenti regole.

- Se la pedina si trova sulle caselle 0 oppure 4, il gioco termina (ovvero la pedina resta dove si trova indefinitamente).
- Se la pedina si trova su una casella $k = 1, 2, 3$, il movimento è deciso dal lancio di $(k + 1)$ monete:
  - se si ottengono tutti *zero*, la pedina si sposta sulla casella 0;
  - se si ottengono tutti *quattro*, la pedina avanza di una casella;
  - in tutti gli altri casi, la pedina resta sull'attuale casella.

Il gioco può essere descritto da una catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$, dove X_n denota la casella occupata dalla pedina all'istante n.

1) Introdurre lo spazio di stato $\mathcal{S}$ della catena e scrivere la matrice di transizione Π.

2) Disegnare il grafo orientato associato alla catena di Markov.

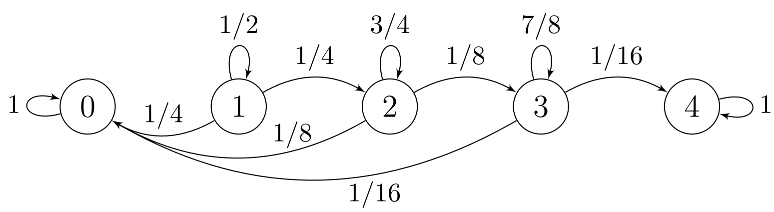
3) Quali sono le classi comunicanti?

4) Scrivere la legge di X_0 (ovvero la distribuzione iniziale della catena di Markov) e trovare la legge di X_1.

1) $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2)



3) $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ e $\{4\}$.

4) Dato che il gioco incomincia dalla casella 1, la densità discreta di X_0 è data da

X_0	0	1	2	3	4
p_{X_0}	0	1	0	0	0

La densità discreta di X_1 è invece data dalla formula $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_0}}\Pi$, quindi

X_1	0	1	2	3	4
p_{X_1}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0