ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
20 giugno 2022

Esercizio 1

Consideriamo il gioco del superenalotto, in cui vengono estratti sei numeri distinti dall'insieme dei numeri naturali da 1 a 90.

1) Introdurre lo spazio campionario Ω con cui si intende risolvere i tre punti seguenti. Si scelga Ω finito e con esiti equiprobabili. Qual è la cardinalità di Ω?

2) Qual è la probabilità che i sei numeri estratti siano tutti numeri pari?

3) Sapendo che i sei numeri estratti sono tutti numeri pari, qual è la probabilità che i sei numeri estratti siano tutti minori o uguali a 24?

4) Qual è la probabilità che cinque dei sei numeri estratti siano strettamente maggiori di 80 e inoltre il rimanente numero estratto sia strettamente minore di 25?

Soluzione

1) $\Omega = \mathbf{C}_{90,6}$, quindi $|\Omega| = \binom{90}{6}$. In alternativa si può scegliere $\Omega = \mathbf{D}_{90,6}$.

2) Sia
$$A \;=\; \text{“i sei numeri estratti sono tutti numeri pari”}.$$
Dato che ci sono 45 numeri pari tra i numeri naturali da 1 a 90, l'evento A ha cardinalità $\binom{45}{6}$. Quindi
$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{\binom{45}{6}}{\binom{90}{6}} \;\approx\; 0.0131.$$

3) Sia
$$B \;=\; \text{“i sei numeri estratti sono tutti minori o uguali a 24”}.$$
Allora, dalla definizione di probabilità condizionata, otteniamo
$$\mathbb{P}(B|A) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$
Resta da calcolare $\mathbb{P}(A \cap B)$. Notiamo che l'evento
$$C \;=\; A \cap B \;=\; \text{“i sei numeri estratti sono tutti pari e minori o uguali a 24”}$$
ha cardinalità $\binom{12}{6}$ (infatti ci sono dodici numeri pari minori o uguali a 24). Quindi
$$\mathbb{P}(C) \;=\; \frac{\binom{12}{6}}{\binom{90}{6}}$$
e
$$\mathbb{P}(B|A) \;=\; \frac{\binom{12}{6}}{\binom{45}{6}} \;\approx\; 0.0001.$$

4) Sia
$$D \;=\; \text{“cinque dei sei numeri estratti sono} > 80 \text{ e il sesto è} < 25\text{”}.$$
Dal metodo delle scelte successive, abbiamo che $|D| = \binom{10}{5} \cdot 24$, infatti:

- scegliamo cinque numeri strettamente maggiori di 80: $\binom{10}{5}$ possibilità;
- scegliamo un numero strettamente minore di 25: $24 = \binom{24}{1}$ possibilità.

Perciò
$$\mathbb{P}(D) \;=\; \frac{\binom{10}{5} \cdot 24}{\binom{90}{6}} \;\approx\; 9.714 \cdot 10^{-6}.$$

Esercizio 2

Siano X e Y due variabili aleatorie discrete con densità discreta congiunta e densità marginali date da

$X \backslash Y$	0	3	4	5	p_X
0	0.1	0.2	0.1	0.2	0.6
2	0	0	0.1	0.2	0.3
6	0	0	0.1	0	0.1
p_Y	0.1	0.2	0.3	0.4	1

1) X e Y sono indipendenti?

2) Quanto vale $\mathbb{P}(2X - Y = 0)$?

3) Sia $Z = 2X - Y$. Determinare la densità discreta di Z.

4) Calcolare $\mathbb{E}[X^2Y^3]$.

Soluzione

1) No, infatti ad esempio $p_{(X,Y)}(0,0) \neq p_X(0)\, p_Y(0)$.

2) Notiamo che $\{2X - Y = 0\} = \{(0,0), (2,4)\}$, quindi

$$\mathbb{P}(2X - Y = 0) \;=\; p_{(X,Y)}(0,0) + p_{(X,Y)}(2,4) \;=\; 0.2.$$

3)

Z	-5	-4	-3	-1	0	8
p_Z	0.2	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1

4)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2Y^3] &= \sum_{\substack{i=0,2,6\\ j=0,3,4,5}} i^2\, j^3\, p_{(X,Y)}(i,j) \\
&= 2^2 \cdot 4^3 \cdot p_{(X,Y)}(2,4) + 2^2 \cdot 5^3 \cdot p_{(X,Y)}(2,5) + 6^2 \cdot 4^3 \cdot p_{(X,Y)}(6,4) \;=\; 356.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Si dice che X ha distribuzione *logistica*.

1) Quanto vale $\mathbb{P}(X \geq 0)$?

2) Determinare la densità di X e calcolare $\mathbb{E}\left[\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-X}}\right]$.

3) Qual è la densità della variabile aleatoria continua $Z = 4X + 7$?

Sia ora Y una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_Y(x) \;=\; \frac{a}{3+\mathrm{e}^{-x}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

dove a è un parametro reale.

4) Dato che F_Y è una funzione di ripartizione, quanto deve valere a? Perchè?

SOLUZIONE

1) $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 - F_X(0) = \frac{1}{2}$.

2)

$$f_X(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\bigg[\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-X}}\bigg] \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,F_X(x)\,f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &=\; \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,F_X(x)\,F_X'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \Big[\big(F_X(x)\big)^2\Big]_{-\infty}^{+\infty} \;=\; 1.\end{aligned}$$

3) La funzione di ripartizione di Z è data da:

$$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}(4X+7 \leq x) \;=\; \mathbb{P}\bigg(X \leq \frac{x-7}{4}\bigg) \;=\; F_X\bigg(\frac{x-7}{4}\bigg), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$f_Z(x) \;=\; F_Z'(x) \;=\; \frac{1}{4}\,F_X'\bigg(\frac{x-7}{4}\bigg) \;=\; \frac{1}{4}\,f_X\bigg(\frac{x-7}{4}\bigg) \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x-7}{4}}}{\big(1+\mathrm{e}^{-\frac{x-7}{4}}\big)^2}.$$

4) Notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} F_Y(x) \;=\; \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3+\mathrm{e}^{-x}} \;=\; \frac{a}{3}.$$

Poiché F_Y è una funzione di ripartizione, deve valere che

$$\lim_{x\to+\infty} F_Y(x) \;=\; 1,$$

da cui otteniamo $a = 3$. Notiamo anche che per tale valore del parametro a la funzione F_X è monotona crescente, continua a destra, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$. Quindi F_X è una funzione di ripartizione. Infine F_X è C^1 a tratti (infatti è una funzione C^1 su tutto $\mathbb{R}$), quindi F_X è la funzione di ripartizione di una v.a. continua.

Esercizio 4

Consideriamo un giocatore che ad ogni giocata vince 1 euro con probabilità $\frac{3}{4}$ e perde 1 euro con probabilità $\frac{1}{4}$. Supponiamo che il giocatore smetta di giocare quando il suo capitale arriva a 0 oppure a 6, allora è possibile descrivere l'evoluzione nel tempo del suo capitale tramite una catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_n$ (in cui supponiamo che quando il suo capitale arriva a 0 oppure a 6 ci resta per sempre).

1) Introdurre lo spazio di stato $\mathcal{S}$ della catena, scrivere la matrice di transizione Π e disegnare il grafo orientato associato alla catena di Markov.

2) Quali sono le classi comunicanti?

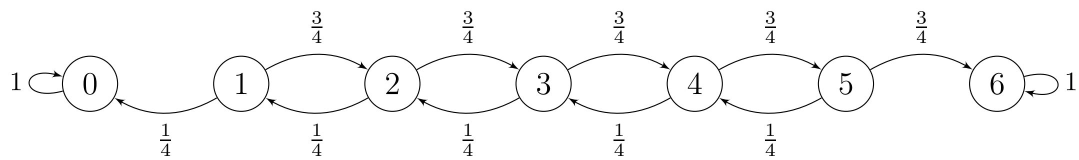
3) Sapendo che ad un certo istante il capitale del giocatore è pari a 3 euro, qual è la probabilità che dopo due giocate ("in due passi") il capitale ammonti a 5 euro?

4) Trovare tutte le distribuzioni invarianti della catena di Markov.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2) $\{0\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\{6\}$.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{35}^{(2)}$. Si ha che

$$\pi_{35}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino } 3\to4\to5} \;=\; \frac{9}{16} \;=\; 0.5625.$$

4) Ricordiamo che una distribuzione invariante è un vettore riga $\vec{\boldsymbol{\pi}} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$ con componenti $\pi_i \in [0, 1]$, tale che

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \vec{\boldsymbol{\pi}}\,\Pi \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=0}^{6} \pi_i \;=\; 1.$$

Queste due uguaglianze corrispondono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \pi_0 \;=\; \pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 \\ \pi_1 \;=\; \frac{1}{4}\pi_2 \\ \pi_2 \;=\; \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_3 \;=\; \frac{3}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_4 \\ \pi_4 \;=\; \frac{3}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_5 \\ \pi_5 \;=\; \frac{3}{4}\pi_4 \\ \pi_6 \;=\; \frac{3}{4}\pi_5 + \pi_6 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \;=\; 1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $\pi_1 = 0$, quindi dalla seconda $\pi_2 = 0$, dalla terza $\pi_3 = 0$, dalla quarta $\pi_4 = 0$, dalla quinta (o, equivalentemente, dalla sesta) $\pi_5 = 0$. La settima equazione diventa $\pi_6 = \pi_6$, che è sempre vera. Resta dunque l'ultima equazione, da cui otteniamo

$$\pi_0 + \pi_6 \;=\; 1.$$

Quindi, ponendo $p := \pi_0$ si ottiene $\pi_6 = 1 - p$. Inoltre $0 \leq p \leq 1$, dato che $\pi_i \in [0,1]$. In conclusione, tutte le distribuzioni invarianti della catena di Markov sono della forma

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \big(p, 0, 0, 0, 0, 0, 1-p\big),$$

con $p \in [0,1]$.