ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
7 giugno 2022

Esercizio 1

Consideriamo tre urne: la prima contiene due palline rosse, la seconda contiene una pallina rossa e una bianca, la terza contiene due palline bianche. Si sceglie a caso un'urna e si effettuano due estrazioni con reimmissione.

1) Si descriva l'esperimento aleatorio tramite un opportuno diagramma ad albero.

2) Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa?

3) Sapendo che la prima pallina estratta è rossa, qual è la probabilità che anche l'altra pallina nell'urna scelta lo sia?

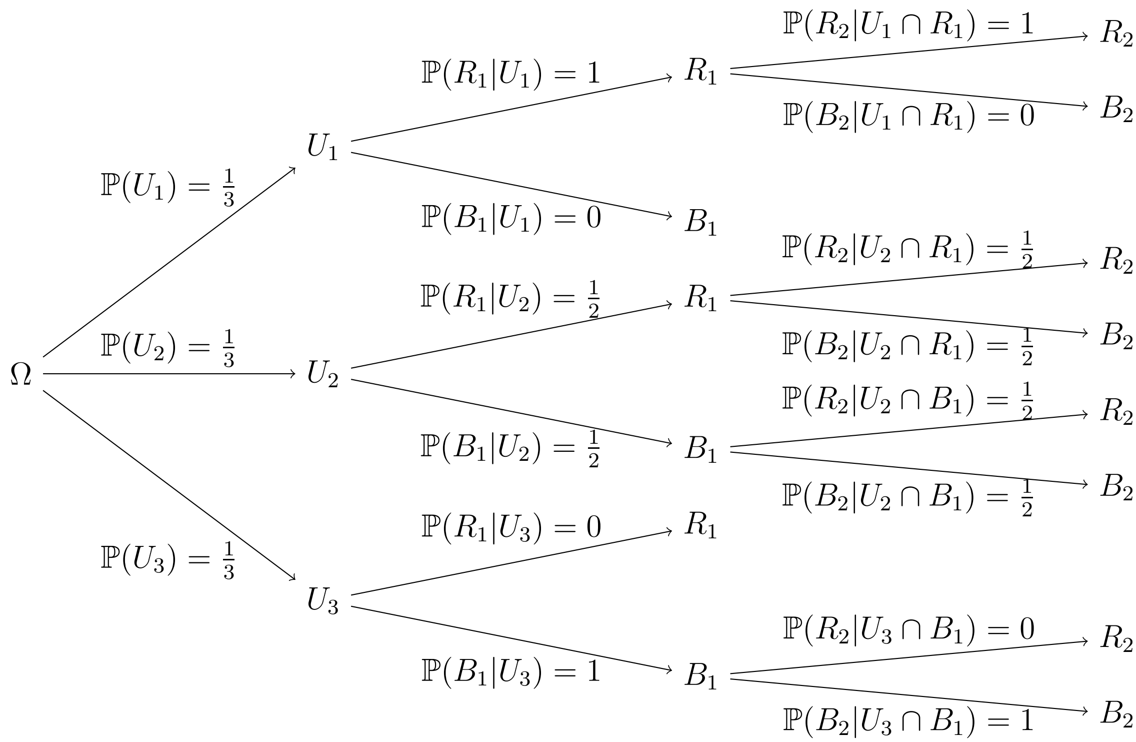
4) Sapendo che la seconda pallina estratta è rossa, qual è la probabilità che anche la prima pallina estratta fosse rossa?

Soluzione

1) Consideriamo gli eventi:

$$
\begin{array}{lcll}
U_i &=& \text{“si sceglie l'urna } i\text{”}, & i = 1, 2, 3, \\
R_i &=& \text{“all'}i\text{-esima estrazione si estrae una pallina rossa”}, & i = 1, 2, \\
B_i &=& \text{“all'}i\text{-esima estrazione si estrae una pallina bianca”} \ = \ R_i^c, & i = 1, 2.
\end{array}
$$

Relativamente a questi eventi otteniamo il seguente diagramma ad albero:



2) Utilizzando la formula delle probabilità totali e la regola della catena, si ottiene

$$\mathbb{P}(R_1) \ = \ \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(U_i \cap R_1) \ = \ \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}(R_1|U_i) \ = \ \frac{1}{2}.$$

3) Dalla definizione di probabilità condizionata, abbiamo che

$$\mathbb{P}(R_2|R_1) \ = \ \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_1)}.$$

Calcoliamo il numeratore con la formula delle probabilità totali e la regola della catena:

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \ = \ \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(U_i \cap R_1 \cap R_2) \ = \ \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(U_i)\mathbb{P}(R_1|U_i)\mathbb{P}(R_2|U_i \cap R_1) \ = \ \frac{5}{12}.$$

Quindi $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{5}{6} = 0.8\bar{3}$.

4) Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(R_1|R_2) \;=\; \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2)}.$$

Resta da calcolare $\mathbb{P}(R_2)$. Procedendo come per il calcolo di $\mathbb{P}(R_1)$, si ottiene

$$\mathbb{P}(R_2) \;=\; \sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(U_i \cap R_1 \cap R_2) + \sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(U_i \cap B_1 \cap R_2) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Quindi $\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{5}{6}$.

Esercizio 2

Un dado non truccato a quattro facce viene lanciato due volte. Si considerino le variabili aleatorie X ed Y date da

$$\begin{aligned} X &= \text{"prodotto dei valori apparsi nei due lanci"} \\ Y &= \text{"valore massimo che appare nei due lanci"} \end{aligned}$$

1) Determinare supporto e densità discreta di X. Quanto vale $\mathbb{P}(X > 6)$?

2) Trovare la densità discreta congiunta di X e Y.

3) X e Y sono indipendenti?

4) Calcolare $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right]$.

Soluzione

1) $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$

X	1	2	3	4	6	8	9	12	16
p_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Quindi $\mathbb{P}(X > 6) = \frac{3}{8} = 37.5\%$.

2) La densità discreta congiunta di X e Y (insieme anche alle rispettive densità marginali) è data da:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	p_X
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
4	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$
6	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
8	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
9	0	0	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$
12	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
16	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
p_Y	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

3) No, infatti ad esempio $p_{(X,Y)}(1,1) \neq p_X(1)\, p_Y(1)$.

4)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] &= \sum_{\substack{i=1,2,3,4,6,8,9,12,16 \\ j=1,2,3,4}} \frac{i}{j}\, p_{(X,Y)}(i,j) \\
&= \frac{1}{1}\, p_{(X,Y)}(1,1) + \frac{2}{2}\, p_{(X,Y)}(2,2) + \frac{3}{3}\, p_{(X,Y)}(3,3) \\
&\quad + \frac{4}{2}\, p_{(X,Y)}(4,2) + \frac{4}{4}\, p_{(X,Y)}(4,4) + \frac{6}{3}\, p_{(X,Y)}(6,3) \\
&\quad + \frac{8}{4}\, p_{(X,Y)}(8,4) + \frac{9}{3}\, p_{(X,Y)}(9,3) + \frac{12}{4}\, p_{(X,Y)}(12,4) \\
&\quad + \frac{16}{4}\, p_{(X,Y)}(16,4) \;=\; \frac{15}{8} \;=\; 1.875.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \alpha\,\mathrm{e}^{-|x|} \;=\; \begin{cases} \alpha\,\mathrm{e}^{x}, & x \leq 0, \\ \alpha\,\mathrm{e}^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Si dice che X ha distribuzione *di Laplace* o *doppia esponenziale*.

1) Determinare il valore del parametro α affinché f_X sia effettivamente una densità.

2) Trovare la funzione di ripartizione F_X della variabile aleatoria X.

3) Calcolare $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$ e $\mathbb{E}[X]$.

4) Qual è la densità della variabile aleatoria continua $Y = X^3$?

Soluzione

1) $\alpha = \frac{1}{2}$.

2)

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^x, & x \le 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-x}), & x \ge 0. \end{cases}$$

3) $\mathbb{P}(-1 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 63.21\%$. Inoltre

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

4) La funzione di ripartizione di Y è data da

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(X^3 \le x) \;=\; \mathbb{P}(X \le \sqrt[3]{x}) \;=\; F_X(\sqrt[3]{x}), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$f_Y(x) \;=\; F_Y'(x) \;=\; (\sqrt[3]{x})'\, F_X'(\sqrt[3]{x}) \;=\; \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f_X(\sqrt[3]{x}) \;=\; \frac{1}{6\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{e}^{-|\sqrt[3]{x}|}.$$

Esercizio 4

Un'urna contiene inizialmente due palline rosse e due palline blu. Due giocatori, Lucia e Stefano, effettuano delle estrazioni successive con le seguenti regole:

- se la pallina estratta è blu, essa viene messa da parte (non viene rimessa nell'urna);
- se la pallina estratta è rossa, essa viene rimessa nell'urna insieme a una nuova pallina blu.

Lucia vince non appena nell'urna ci sono quattro palline blu, invece Stefano vince non appena nell'urna non ci sono più palline blu.

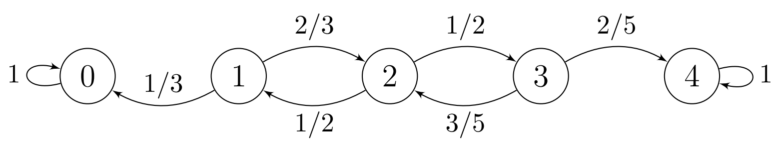
Il gioco può essere descritto da una catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$, dove X_n denota il numero di palline blu presenti nell'urna all'istante n.

1) Introdurre lo spazio di stato $\mathcal{S}$ della catena, scrivere la matrice di transizione Π e disegnare il grafo orientato associato alla catena di Markov.
2) Quali sono le classi comunicanti?
3) Scrivere la legge di X_0 (ovvero la distribuzione iniziale della catena di Markov) e calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 4)$.
4) Calcolare $\pi_{14}^{(4)}$.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2) $\{0\}$, $\{1, 2, 3\}$ e $\{4\}$.

3) Dato che inizialmente ci sono due palline blu nell'urna, la densità discreta di X_0 è data da

X_0	0	1	2	3	4
p_{X_0}	0	0	1	0	0

La densità discreta di X_3 è invece data dalla formula $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_3}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_0}} \Pi^3$, quindi

$$\mathbb{P}(X_3 = 4) \;=\; \sum_{i=0}^{4} p_{X_0}(i)\, \pi_{i4}^{(3)} \;=\; \pi_{24}^{(3)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 1}_{\text{prob. cammino } 2\to 3\to 4\to 4} \;=\; \frac{1}{5}.$$

4)

$$\pi_{14}^{(4)} \;=\; \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 1}_{\text{prob. cammino } 1\to 2\to 3\to 4\to 4} \;=\; \frac{2}{15}.$$