ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
14 settembre 2021

Esercizio 1

Consideriamo il gioco del lotto, in cui vengono estratti cinque numeri distinti dall'insieme dei numeri naturali da 1 a 90. Un giocatore gioca il numero 3. Per aiutare la fortuna, egli fa in modo di aggiungere all'urna tre palline supplementari con il numero 3 (quindi ora vi sono nell'urna 93 palline).

1) Si introduca uno spazio campionario Ω per descrivere l'esperimento aleatorio.

2) Qual è la probabilità che il numero 3 venga estratto due volte?

3) Qual è la probabilità che il trucco venga scoperto (cioè che il numero 3 venga estratto almeno due volte)?

4) Qual è la probabilità che il trucco venga scoperto esattamente alla quinta estrazione?
[Per rispondere a quest'ultimo quesito è possibile utilizzare uno spazio campionario differente da quello usato per rispondere ai primi tre punti]

Soluzione

1) Consideriamo lo spazio campionario $\Omega = \mathbf{C}_{93,5}$ delle combinazioni semplici di cinque numeri dall'insieme $E := \{1, 2, 3, 4, \ldots, 90, 3', 3'', 3'''\}$, dove $3'$, $3''$, $3'''$ indicano le palline con il numero 3 che sono state aggiunte all'urna dal giocatore. In alternativa, è possibile considerare lo spazio campionario $\Omega = \mathbf{D}_{93,5}$, che verrà utilizzato per rispondere al quarto quesito.

2) Sia
$$A_2 \;=\; \text{“tra i cinque numeri estratti il numero 3 compare due volte”}.$$
Determiniamo $|A_2|$ tramite le seguenti scelte successive:

- scelta dei due 3 estratti: $|\mathbf{C}_{4,2}| = \binom{4}{2}$ possibilità;
- scelta degli altri tre numeri estratti: $|\mathbf{C}_{89,3}| = \binom{89}{3}$ possibilità.

Quindi, per il metodo delle scelte successive abbiamo che
$$\mathbb{P}(A_2) \;=\; \frac{\binom{4}{2}\binom{89}{3}}{\binom{93}{5}} \;=\; \frac{2552}{194649} \;\approx\; 1.31\%.$$

3) Sia
$$A \;=\; \text{“il numero 3 viene estratto almeno due volte”}.$$
Notiamo che $A = A_2 \cup A_3 \cup A_4$, dove
$$A_i \;=\; \text{“tra i cinque numeri estratti il numero 3 compare } i \text{ volte”}, \qquad i = 2, 3, 4.$$
Poiché A_2, A_3, A_4 sono insiemi disgiunti, per l'additività vale che
$$\mathbb{P}(A) \;=\; \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \;=\; \frac{\binom{4}{2}\binom{89}{3}}{\binom{93}{5}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{89}{2}}{\binom{93}{5}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{89}{1}}{\binom{93}{5}} \;=\; \frac{373}{27807} \;\approx\; 1.34\%.$$

4) Per rispondere a quest'ultimo quesito, consideriamo lo spazio campionario $\Omega = \mathbf{D}_{93,5}$ delle disposizioni semplici di cinque numeri dall'insieme $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 90, 3', 3'', 3'''\}$. Sia
$$B \;=\; \text{“alla quinta estrazione esce un secondo numero tre”}.$$
Determiniamo $|B|$ tramite le seguenti scelte successive:

- scelta dell'estrazione, tra le prime quattro, in cui esce uno dei due numeri tre: 4 possibilità;
- scelta dei due numeri tre, tra $3, 3', 3'', 3'''$, che vengono estratti e del loro ordine: $|\mathbf{D}_{4,2}| = 4 \cdot 3$ possibilità;
- scelta degli altri tre numeri estratti: $|\mathbf{D}_{89,3}| = 89 \cdot 88 \cdot 87$ possibilità.

Quindi
$$\mathbb{P}(B) \;=\; \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{93 \cdot 92 \cdot 91 \cdot 90 \cdot 89} \;=\; \frac{5104}{973245} \;\approx\; 0.52\%.$$

Esercizio 2

Una moneta equilibrata ha scritto $+1$ su una faccia e -1 sull'altra. Lanciamo due volte la moneta e indichiamo rispettivamente con X e Y i numeri ottenuti. Poniamo quindi

$$S = X + Y, \qquad D = X - Y, \qquad T = XY.$$

1) Determinare densità discreta congiunta e marginali di X e Y.

2) Determinare le marginali di S, D e T.

3) S e T sono indipendenti?

4) Determinare la congiunta di X e T e dire se sono indipendenti.

Soluzione

1) Utilizzando l'indipendenza di X e Y, si ottiene la seguente tabella:

$X \backslash Y$	-1	1	p_X
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
p_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

2) La variabile aleatoria S ha legge data da

S	-2	0	2
p_S	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

D ha la stessa legge di S, come segue anche dal fatto che $D = X + (-Y)$ e $-Y$ ha la stessa legge di Y. Infine

T	-1	1
p_T	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3) S e T non sono indipendenti, infatti ad esempio $\mathbb{P}(S = 2, T = -1) \neq \mathbb{P}(S = 2)\mathbb{P}(T = -1)$.

4) X e T sono indipendenti, infatti, calcolando la congiunta, si ottiene la seguente tabella:

$X \backslash T$	-1	1	p_X
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
p_T	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \ = \ \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1 - a\mathrm{e}^{-(x-2)}, & x \geq 2, \end{cases}$$

dove a è un parametro reale strettamente positivo da determinarsi.

1) Trovare il valore del parametro a affinché F_X sia la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua.

2) Calcolare $\mathbb{P}(3/2 \leq X \leq 2)$.

3) Determinare la densità f_X della variabile aleatoria X.

Si consideri la variabile aleatoria

$$Y \ = \ \begin{cases} 0, & \text{se } X \leq 2, \\ 1, & \text{se } X > 2. \end{cases}$$

4) Determinare la legge di Y.

Soluzione

1) F_X deve essere una funzione *continua* affinché X sia una variabile aleatoria continua, quindi necessariamente $a = \frac{1}{2}$. Notiamo che per tale valore del parametro a valgono le altre proprietà che deve avere una funzione di ripartizione, infatti F_X è monotona crescente, continua a destra (è addirittura continua), infine

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) \;=\; 0, \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) \;=\; 1.$$

2)

$$\mathbb{P}(3/2 \le X \le 2) \;=\; F_X(2) - F_X(3/2) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{6}.$$

3) Derivando F_X, otteniamo

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{1}{x^2}, & 1 < x \le 2, \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-2)}, & x > 2, \end{cases}$$

dove abbiamo posto arbitrariamente $f_X(1) = 0$ e $f_X(2) = \frac{1}{4}$.

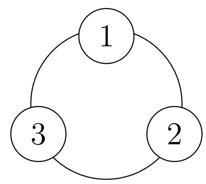
4) Si noti che Y è una variabile aleatoria discreta con supporto $\mathcal{S}_Y = \{0,1\}$. Quindi Y ha distribuzione di Bernoulli. Dobbiamo dunque determinare $\mathbb{P}(Y=1)$:

$$\mathbb{P}(Y=1) \;=\; \mathbb{P}(X>2) \;=\; 1 - F_X(2) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Quindi $Y \sim B(1/2)$.

Esercizio 4

Consideriamo un tavolo rotondo in cui ci sono tre sedie numerate da 1 a 3 disposte come in figura:



Una persona parte inizialmente dalla sedia 1: in ogni istante lancia un dado regolare a quattro facce (numerate da 1 a 4) ed effettua un numero di spostamenti in senso orario, da una sedia a quella adiacente, pari al risultato del dado (ad esempio, se in un certo istante la persona si trova nella sedia 1 e il dado ha come esito 2, all'istante successivo la persona si troverà nella sedia 3). Sia

$$X_n \;=\; \text{“n}^{\text{o}}\text{ della sedia occupata all'istante } n\text{”}, \qquad n \geq 1.$$

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

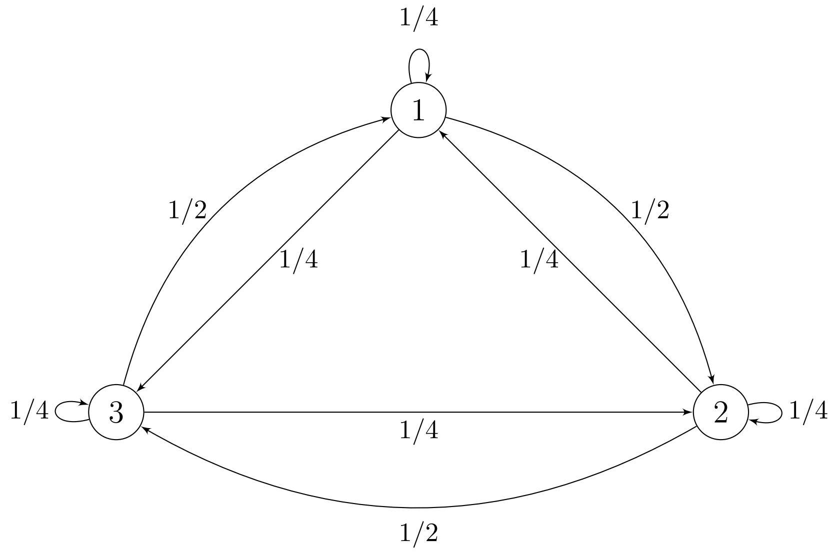
3) Calcolare la probabilità che la persona passi dalla sedia 2 alla sedia 3 in due passi.

4) Trovare l'unica distribuzione invariante.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



2) C'è un'unica classe comunicante, che è quindi $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$. La catena di Markov è dunque irriducibile.

3) Abbiamo che

$$\pi_{23}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 2\to1\to3} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 2\to2\to3} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 2\to3\to3} = \frac{5}{16} = 31.25\%.$$

4) Ricordiamo che una distribuzione invariante è un vettore riga $\vec{\boldsymbol{\pi}} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ tale che

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} = \vec{\boldsymbol{\pi}}\,\Pi \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1.$$

Queste due uguaglianze corrispondono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

Questo sistema ha un'unica soluzione data da $\pi_i = \frac{1}{3}$, per ogni $i = 1, 2, 3$. Quindi

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$