ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
13 luglio 2021

Esercizio 1

In un villaggio vivono 24 cavalieri, 51 furfanti e 75 paggi. I cavalieri dicono quasi sempre la verità, diciamo nel 95% dei casi; i furfanti, al contrario, mentono nell'80% dei casi; infine, i paggi dicono la verità con una probabilità del 56%. Un visitatore appena arrivato domanda alla prima persona che incontra il nome del villaggio in cui si trova.

1) Rappresentare l'esperimento aleatorio tramite un opportuno diagramma ad albero.

2) Calcolare la probabilità che l'abitante abbia detto la verità.

3) Sapendo che l'abitante ha detto la verità, quale la probabilità che sia un paggio?

Per scrupolo, il visitatore decide di porre la stessa domanda ad un secondo abitante. (Supponiamo, per semplicità, che il visitatore scelga a caso il secondo abitante tra tutti gli abitanti del villaggio, esattamente nello stesso modo con cui ha scelto il primo abitante; supponiamo inoltre che le due risposte possano essere considerate indipendenti tra loro.)

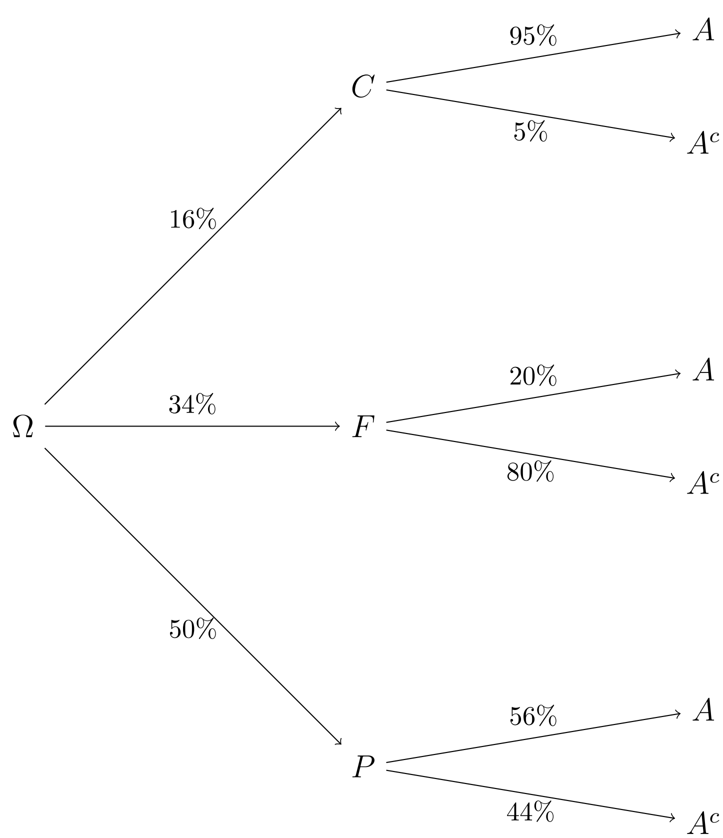
4) Qual è la probabilità che entrambi gli abitanti abbiano detto la verità?

Soluzione

1) Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned} C &= \text{“l’abitante è un cavaliere”}, \\ F &= \text{“l’abitante è un furfante”}, \\ P &= \text{“l’abitante è un paggio”}, \\ A &= \text{“l’abitante dice la verità”}. \end{aligned}$$

Il corrispondente diagramma ad albero è dato da:



2) Per la formula delle probabilità totali e la regola della catena,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap F) + \mathbb{P}(A \cap P) \\ &= \mathbb{P}(A|C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A|F)\,\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(A|P)\,\mathbb{P}(P) \;=\; \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3) Per la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(P|A) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A|P)\,\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(A)} \;=\; 56\%.$$

4) Sia

$$B \;=\; \text{“il secondo abitante dice la verità”}.$$

Per quanto visto al punto precedente, si ha che $\mathbb{P}(B) = 1/2$. Inoltre, per ipotesi sappiamo che A e B sono eventi indipendenti. Quindi la probabilità richiesta è la seguente:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \;=\; \frac{1}{4}.$$

Esercizio 2

Ci sono tre urne U_1, U_2, U_3 aventi le seguenti composizioni:

- l'urna U_1 contiene due palline, etichettate con i numeri naturali $1, 2$;
- l'urna U_2 contiene quattro palline, etichettate con i numeri naturali $1, 2, 3, 4$;
- l'urna U_3 contiene sei palline, etichettate con i numeri naturali $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Si lancia un dado a tre facce. Sia X l'esito di tale lancio. Si estrae dunque una pallina dall'urna numero X. Sia infine Y il numero della pallina estratta.

1) Determinare densità discreta congiunta e marginali di X e Y.

2) X e Y sono indipendenti?

3) Calcolare $\mathbb{P}(X < Y)$.

4) Sia $Z = Y - X$. Determinare congiunta e marginali di X e Z.

Soluzione

1) La tabella della densità discreta congiunta e delle marginali è la seguente:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	p_X
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
p_Y	$\frac{11}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	1

2) No, infatti ad esempio

$$p_{(X,Y)}(1,1) \;=\; \frac{1}{6} \;\neq\; \frac{11}{36}\cdot\frac{1}{3} \;=\; p_X(1)\,p_Y(1).$$

3)

$$\mathbb{P}(X<Y) \;=\; \sum_{i,j\,:\,x_i<y_j} p_{(X,Y)}(x_i,y_j) \;=\; p_{(X,Y)}(1,2)+p_{(X,Y)}(2,3)+p_{(X,Y)}(2,4)$$
$$+\,p_{(X,Y)}(3,4)+p_{(X,Y)}(3,5)+p_{(X,Y)}(3,6) \;=\; \frac{1}{2}.$$

4) Si ottiene la seguente tabella della congiunta (con anche le marginali):

$X \backslash Z$	-2	-1	0	1	2	3	p_X
1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
p_Z	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{18}$	1

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3\theta^3}{x^4}, & x \geq 2, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

con θ numero reale strettamente positivo da determinarsi.

1) Trovare il valore del parametro θ affinché f_X sia effettivamente una densità.

D'ora in avanti si ponga θ uguale al valore trovato al punto precedente.

2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

3) Determinare la funzione di ripartizione di X.

4) Sia Y la variabile aleatoria continua data da $Y = X^5$. Determinare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) Deve valere che $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{2}^{+\infty} \frac{3\theta^3}{x^4}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\theta^3}{2^3},$$

da cui otteniamo $\theta = 2$. Notiamo che per tale valore di θ la densità verifica anche la proprietà: $f_X(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) Dal punto precedente sappiamo che $\theta = 2$, quindi

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{24}{x^4}, & x \geq 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{2}^{+\infty} x\,\frac{24}{x^4}\,\mathrm{d}x \;=\; 3.$$

3) Si ha che $F_X(x) = 0$ per $x \leq 2$. Inoltre, per $x \geq 2$ vale che

$$F_X(x) \;=\; \int_{2}^{x} \frac{24}{y^4}\,\mathrm{d}y \;=\; 1 - \frac{8}{x^3}.$$

Quindi

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 1 - \dfrac{8}{x^3}, & x \geq 2. \end{cases}$$

4) Abbiamo che

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \leq x) \;=\; \mathbb{P}(X^5 \leq x) \;=\; \mathbb{P}\big(X \leq \sqrt[5]{x}\big) \;=\; F_X\big(\sqrt[5]{x}\big).$$

Quindi

$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} 0, & \sqrt[5]{x} \leq 2, \\ 1 - \dfrac{8}{\sqrt[5]{x^3}}, & \sqrt[5]{x} \geq 2 \end{cases} \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 32, \\ 1 - \dfrac{8}{\sqrt[5]{x^3}}, & x \geq 32. \end{cases}$$

Esercizio 4

Consideriamo un gioco in cui ci sono cinque stati possibili: 1, 2, 3, 4, 5. Ad ogni istante, per decidere quale sarà il nuovo stato si pesca una carta da un mazzo costituito da 40 carte, identificate dal seme (spade, coppe, bastoni, denari) e dal tipo (asso, 2, 3, 4, 5, 6, 7, fante, cavallo, re), e si procede in base alle seguenti regole:

- se si è nello stato 5, si resta nello stato 5; negli altri casi si vedano i punti successivi;
- se il seme della carta estratta è coppe e il tipo non è l'asso, allora ci si sposta nello stato 4 (se ci si trova già nello stato 4, allora si rimane in questo stato);
- se la carta estratta è l'asso di coppe, allora ci si sposta nello stato 5;
- se il seme della carta estratta è spade oppure bastoni, allora ci si sposta nello stato 1 (se ci si trova già nello stato 1, allora si rimane in questo stato);
- se il seme della carta estratta è denari, allora si resta nello stato in cui ci si trova.

L'evoluzione del gioco può essere descritta da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ in cui

$$X_n \;=\; \text{“stato del gioco all'istante } n\text{”}, \qquad n \geq 1.$$

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

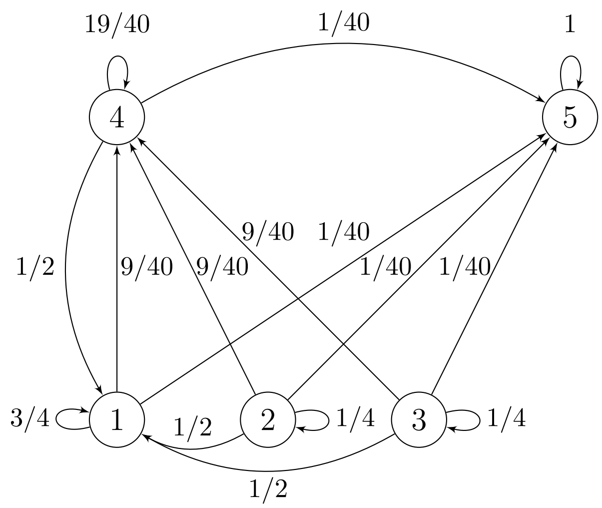
3) Calcolare la probabilità di passare dallo stato 1 allo stato 5 in tre passi.

4) Calcolare $\mathbb{P}(X_7 = 4 | X_5 = 1, X_4 = 1)$.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{19}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2) Le classi comunicanti sono $\{1,4\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$.

3) Abbiamo che

$$\begin{aligned}\pi_{15}^{(3)} = \; & \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{40}}_{\text{prob. cammino } 1\to1\to1\to5} + \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{40}\cdot\frac{1}{40}}_{\text{prob. cammino } 1\to1\to4\to5} + \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{40}\cdot 1}_{\text{prob. cammino } 1\to1\to5\to5} \\ & + \underbrace{\frac{9}{40}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{40}}_{\text{prob. cammino } 1\to4\to1\to5} + \underbrace{\frac{9}{40}\cdot\frac{19}{40}\cdot\frac{1}{40}}_{\text{prob. cammino } 1\to4\to4\to5} + \underbrace{\frac{9}{40}\cdot\frac{1}{40}\cdot 1}_{\text{prob. cammino } 1\to4\to5\to5} \\ & + \underbrace{\frac{1}{40}\cdot 1\cdot 1}_{\text{prob. cammino } 1\to5\to5\to5} = \frac{4681}{64000} \approx 7.31\%.\end{aligned}$$

4) Dalla proprietà di Markov abbiamo che $\mathbb{P}(X_7 = 4|X_5 = 1, X_4 = 1) = \mathbb{P}(X_7 = 4|X_5 = 1) = \pi_{14}^{(2)}$, quindi

$$\mathbb{P}(X_7 = 4|X_5 = 1, X_4 = 1) = \pi_{14}^{(2)} = \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{40}}_{\text{prob. cammino } 1\to1\to4} + \underbrace{\frac{9}{40}\cdot\frac{19}{40}}_{\text{prob. cammino } 1\to4\to4} = \frac{441}{1600} \approx 27.56\%.$$