ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
22 giugno 2021

Esercizio 1

Nove persone salgono su un treno composto da tre vagoni e ognuna sceglie completamente a caso, e indipendentemente dagli altri, il vagone su cui viaggiare. Si considerino gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“sul primo vagone salgono tre persone”}, \\ B &= \text{“su ogni vagone salgono tre persone”}, \\ C &= \text{“su un vagone salgono due persone, su un altro tre, sul rimanente quattro”}. \end{aligned}$$

1) Si introduca uno spazio campionario Ω per descrivere l'esperimento aleatorio.

2) Si calcoli $\mathbb{P}(A)$.

3) Si calcoli $\mathbb{P}(B)$.

4) Si calcoli $\mathbb{P}(C)$.

Soluzione

1) Consideriamo lo spazio campionario $\Omega = \mathbf{DR}_{3,9}$ delle disposizioni con ripetizione di nove numeri dall'insieme $E := \{1, 2, 3\}$. Ad esempio, se la quinta componente di una disposizione è il numero 2 significa che la quinta persona è salita sul secondo vagone.

2) *Calcolo di* $\mathbb{P}(A)$. Determiniamo $|A|$ con le seguenti scelte successive:

   - scelta degli indici della sequenza in cui compare 1: $\binom{9}{3}$ possibilità;
   - scelta delle altre componenti della sequenza, in cui possono essere collocati i numeri 2 o 3: 2^6 possibilità.

   Quindi
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{9}{3}\, 2^6}{3^9} \approx 27.31\%.$$

3) *Calcolo di* $\mathbb{P}(B)$. Determiniamo $|B|$ con le seguenti scelte successive:

   - scelta degli indici della sequenza in cui compare 1: $\binom{9}{3}$ possibilità;
   - scelta degli indici della sequenza in cui compare 2: $\binom{6}{3}$ possibilità.

   Quindi
$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}}{3^9} \approx 8.54\%.$$

4) *Calcolo di* $\mathbb{P}(C)$. Determiniamo $|C|$ con le seguenti scelte successive:

   - scelta del vagone in cui salgono due persone: 3 possibilità;
   - scelta del vagone in cui salgono tre persone: 2 possibilità;
   - scelta delle persone che salgono nel vagone in cui ci saranno due persone: $\binom{9}{2}$ possibilità;
   - scelta delle persone che salgono nel vagone in cui ci saranno tre persone: $\binom{7}{3}$ possibilità;

   Quindi
$$\mathbb{P}(C) = \frac{3!\binom{9}{2}\binom{7}{3}}{3^9} \approx 38.41\%.$$

Esercizio 2

Consideriamo due dadi *a tre facce*: uno è regolare, mentre l'altro è stato manipolato in modo tale da ottenere 1 con probabilità 1/2 e gli altri due risultati con probabilità 1/4. Si lanciano entrambi i dadi (si suppongano indipendenti i due risultati). Sia X il risultato del lancio del dado regolare, sia invece Y il risultato del lancio del dado truccato.

1) Determinare densità discreta congiunta e marginali di X e Y.

2) Calcolare $\mathbb{E}[(X-2)(Y-2)]$.

3) Calcolare $\mathbb{P}(XY \geq 4)$.

4) Siano $U = \max(X, Y)$ e $V = \min(X, Y)$. Determinare congiunta e marginali di U e V.

Soluzione

1) Poiché X rappresenta il dado regolare, si ha che

X	1	2	3
p_X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Al contrario, la densità discreta di Y è data da

Y	1	2	3
p_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Poiché X e Y sono indipendenti, otteniamo la seguente tabella della congiunta:

$X \backslash Y$	1	2	3	p_X
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
p_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

2)

$$\mathbb{E}[(X-2)(Y-2)] \;=\; \sum_{i,j} (x_i - 2)\,(y_j - 2)\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \;=\; 0.$$

Alternativamente, ricordando che X e Y sono indipendenti, si ha che

$$\mathbb{E}[(X-2)(Y-2)] \;=\; \mathbb{E}[X-2]\,\mathbb{E}[Y-2].$$

Quindi, dalla linearità del valore atteso, $\mathbb{E}[(X-2)(Y-2)] = (\mathbb{E}[X]-2)(\mathbb{E}[Y]-2)$, che è uguale a zero, infatti $\mathbb{E}[X] = 2$.

3)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(XY \geq 4) \;&=\; \sum_{i,j\colon\, x_i y_j \geq 4} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \\ &=\; p_{(X,Y)}(2,2) + p_{(X,Y)}(3,2) + p_{(X,Y)}(2,3) + p_{(X,Y)}(3,3) \;=\; \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4) Si ottiene la seguente tabella:

$U \backslash V$	1	2	3	p_U
1	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
p_V	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	1

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

1) Determinare la densità f_X della variabile aleatoria X.

2) Calcolare $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

3) Sia Y la variabile aleatoria continua $Y = 3X$. Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

4) Determinare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) Si ha che

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}, & 0 < x \le 1, \\ \mathrm{e}^{-x}, & x > 1, \end{cases}$$

dove è stato posto arbitrariamente $f_X(0) = 0$ e $f_X(1) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

2)

$$\mathbb{P}(X \ge 2) \;=\; 1 - F_X(2) \;=\; \mathrm{e}^{-2} \;\approx\; 13.53\%.$$

3) Si ha che

$$\mathbb{E}[Y] \;=\; 3\,\mathbb{E}[X] \;=\; 3\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) x \,\mathrm{d}x + 3\int_1^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{3}{2} + \frac{9}{2\mathrm{e}}.$$

4) Abbiamo che

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \le x) \;=\; \mathbb{P}(3X \le x) \;=\; \mathbb{P}(X \le x/3) \;=\; F_X(x/3).$$

Quindi

$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x/3 \le 0, \\ \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\frac{x}{3}, & 0 \le x/3 \le 1, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, & x/3 \ge 1 \end{cases} \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\frac{x}{3}, & 0 \le x \le 3, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, & x \ge 3. \end{cases}$$

Esercizio 4

Due giocatori A e B hanno due euro ciascuno e fanno il seguente gioco. A ogni istante, si lancia una moneta equilibrata: se esce testa, il giocatore B dà un euro al giocatore A; al contrario, se esce croce, A dà un euro a B. Il gioco termina quando uno dei due giocatori resta senza soldi; in tal caso l'altro giocatore ha vinto. Possiamo descrivere questo gioco tramite una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ a cinque stati $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dove

$$X_n \;=\; \text{"euro posseduti dal giocatore } A\text{"}, \qquad n \geq 1.$$

1) Determinare la distribuzione iniziale, ossia la distribuzione di X_1.

2) Determinare la matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

3) Quali sono le classi comunicanti?

4) Sapendo che il giocatore A ha vinto all'istante $n = 4$, qual è la probabilità che all'istante $n = 2$ il giocatore A avesse 3 euro?

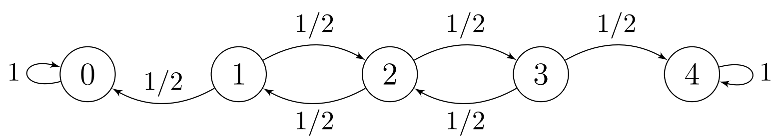
Soluzione

1) Si ha che $X_1 = 2$, quindi

X_1	0	1	2	3	4
p_{X_1}	0	0	1	0	0

2)

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



3) Le classi comunicanti sono $\{0\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$.

4) Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(X_2 = 3 | X_4 = 4)$. Dalla formula di Bayes

$$\mathbb{P}(X_2 = 3|X_4 = 4) = \frac{\mathbb{P}(X_4 = 4|X_2 = 3)\mathbb{P}(X_2 = 3)}{\mathbb{P}(X_4 = 4)} = \frac{\pi_{34}^{(2)} p_{X_2}(3)}{p_{X_4}(4)}.$$

Abbiamo che

$$\pi_{34}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1}_{\text{prob. cammino } 3 \to 4 \to 4} = \frac{1}{2},$$

$$p_{X_2}(3) = \sum_{i=0}^{4} p_{X_1}(i)\, \pi_{i3} = \pi_{23} = \frac{1}{2},$$

$$p_{X_4}(4) = \sum_{i=0}^{4} p_{X_1}(i)\, \pi_{i4}^{(3)} = \pi_{24}^{(3)} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}_{\text{prob. cammino } 2 \to 3 \to 4 \to 4} = \frac{1}{4}.$$

Quindi $\mathbb{P}(X_2 = 3|X_4 = 4) = 1$.