ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
27 maggio 2021

Esercizio 1

Un circolo di freccette ha 200 iscritti. Di questi, 8 sono campioni e a ogni lancio hanno una probabilità del 40% di fare centro; 72 sono buoni giocatori, per i quali la probabilità di fare centro è del 15%; i rimanenti sono principianti, che fanno centro con una probabilità del 5%. (Supponiamo che per ciascun giocatore i risultati di lanci successivi siano indipendenti.)
Un giorno mi presento al circolo e vedo un iscritto che effettua 2 lanci.

1) Riportare il diagramma ad albero dell'esperimento aleatorio.

2) Qual è la probabilità che il giocatore sia un principiante e che faccia centro in entrambi i lanci?

3) Qual è la probabilità che faccia centro in entrambi i lanci?

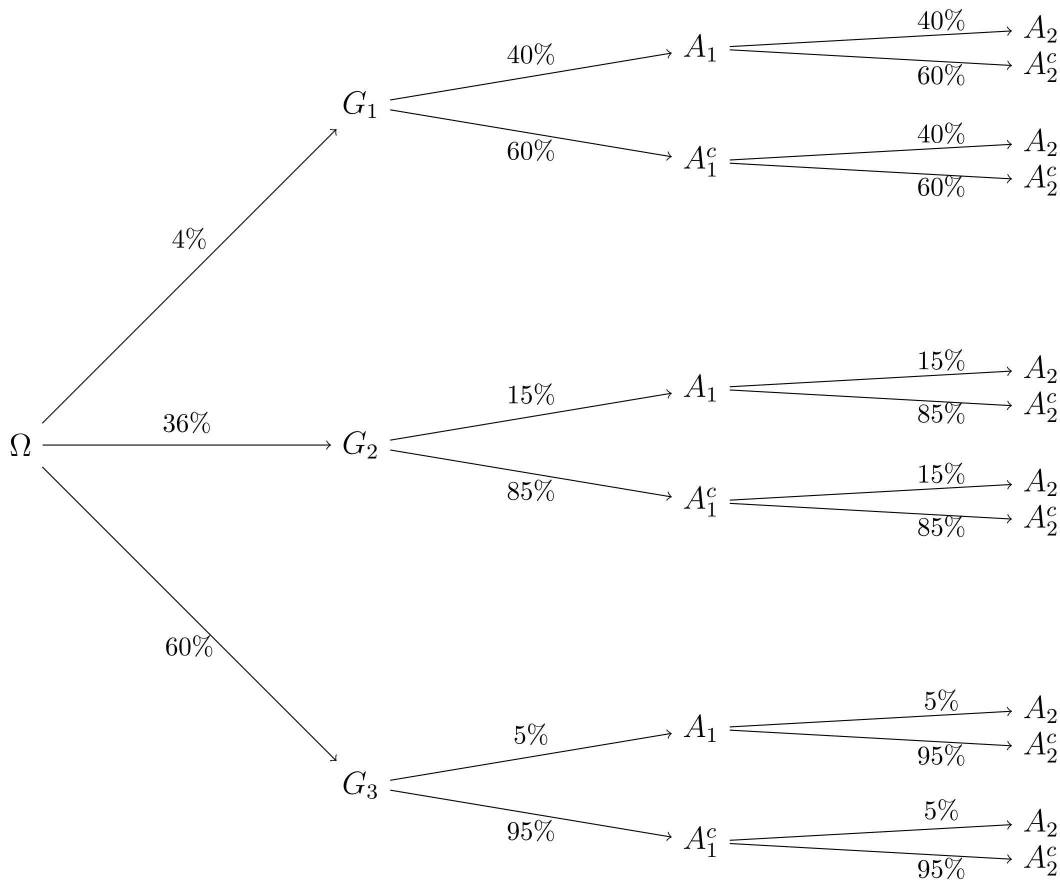
4) Sapendo che l'iscritto ha fatto centro in entrambi i lanci, qual è la probabilità che si tratti di un principiante?

Soluzione

1) Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned} G_1 &= \text{“si tratta di un campione”}, \\ G_2 &= \text{“si tratta di un buon giocatore”}, \\ G_3 &= \text{“si tratta di un principiante”}, \\ A_i &= \text{“il giocatore fa centro all'}i\text{-esimo lancio”}, \end{aligned}$$

per $i = 1, 2$. Il diagramma ad albero è allora il seguente:



2) Per la regola della catena

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_3) = \mathbb{P}(A_2|A_1 \cap G_3)\mathbb{P}(A_1|G_3)\mathbb{P}(G_3) = 5\% \cdot 5\% \cdot 60\% = 0.15\%.$$

3) Per la formula delle probabilità totali

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_3) \\ &= \mathbb{P}(A_2|A_1 \cap G_1)\mathbb{P}(A_1|G_1)\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(A_2|A_1 \cap G_2)\mathbb{P}(A_1|G_2)\mathbb{P}(G_2) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_2|A_1 \cap G_3)\mathbb{P}(A_1|G_3)\mathbb{P}(G_3) \\ &= 40\% \cdot 40\% \cdot 4\% + 15\% \cdot 15\% \cdot 36\% + 5\% \cdot 5\% \cdot 60\% = 1.6\%. \end{aligned}$$

4) Dalla definizione di probabilità condizionata, si ha che

$$\mathbb{P}(G_3|A_1 \cap A_2) \;=\; \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap G_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \;=\; \frac{0.15\%}{1.6\%} \;=\; 9.375\%.$$

Esercizio 2

Consideriamo un dado a sei facce *truccato*, in cui ogni numero pari ha la medesima probabilità di uscire, così come ogni numero dispari ha la medesima probabilità di uscire; tuttavia la probabilità dei numeri pari è doppia rispetto a quella dei numeri dispari. Sia

$$X \;=\; \text{“risultato del lancio del dado”}.$$

1) Determinare supporto e densità discreta di X.

2) Calcolare $\mathbb{E}[|X-3|]$.

3) Sia $Y = |X-3|$. Determinare supporto e densità discreta di Y.

4) Calcolare $\mathbb{P}(Y = 2X)$.

Soluzione

1) $\mathcal{S}_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e la densità discreta di X è data dalla seguente tabella:

X	1	2	3	4	5	6
p_X	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X-3|] &= \sum_{i=1}^{6} |x_i - 3|\, p_X(x_i) \\ &= |1-3|\,\frac{1}{9} + |2-3|\,\frac{2}{9} + |3-3|\,\frac{1}{9} + |4-3|\,\frac{2}{9} + |5-3|\,\frac{1}{9} + |6-3|\,\frac{2}{9} \;=\; \frac{14}{9} \;\approx\; 1.556.\end{aligned}$$

3)

Y	0	1	2	3
p_Y	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

4) Abbiamo che

$$\mathbb{P}(Y = 2X) \;=\; \mathbb{P}(|X-3| = 2X) \;=\; \mathbb{P}(X = 1) \;=\; p_X(1) \;=\; \frac{1}{9} \;\approx\; 0.111.$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ oppure } x > 2, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ a - x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

con a numero reale strettamente positivo da determinarsi.

1) Trovare il valore del parametro a in modo tale che f_X sia effettivamente una densità.

D'ora in avanti si ponga a uguale al valore trovato al punto precedente.

2) Determinare la funzione di ripartizione di X.

3) Calcolare $\mathbb{P}(X \geq 3/2)$.

4) Sia Y la v.a. continua data da $Y = X^3$. Determinare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) Deve valere che $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (a-x)\,\mathrm{d}x \;=\; a-1,$$

da cui otteniamo $a = 2$. Notiamo che per tale valore di a si ha che $f_X(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2)

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 - 1, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

3)

$$\mathbb{P}(X \geq 3/2) \;=\; 1 - F_X(3/2) \;=\; \frac{1}{8} \;=\; 12.5\%.$$

4) Si ha che

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \leq x) \;=\; \mathbb{P}(X^3 \leq x) \;=\; \mathbb{P}(X \leq \sqrt[3]{x}) \;=\; F_X(\sqrt[3]{x}).$$

Quindi

$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} 0, & \sqrt[3]{x} \leq 0, \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}, & 0 \leq \sqrt[3]{x} \leq 1, \\ 2\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} - 1, & 1 \leq \sqrt[3]{x} \leq 2, \\ 1, & \sqrt[3]{x} \geq 2 \end{cases} \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} - 1, & 1 \leq x \leq 8, \\ 1, & x \geq 8. \end{cases}$$

Esercizio 4

Consideriamo un gioco in cui ci sono sei stati possibili: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Per decidere lo stato iniziale si lancia un dado equilibrato a sei facce. Dopodiché, per effettuare le altre mosse si lancia nuovamente il dado e si procede come segue:

- se il risultato è un numero pari si resta nello stato attuale;
- se il risultato è 1 si passa allo stato successivo (se ci si trova in 6 si rimane in 6);
- se il risultato è 3 si passa allo stato precedente (se ci si trova in 1 si rimane in 1);
- se il risultato è 5 si passa allo stato 1 (se ci si trova in 6 si rimane in 6).

L'evoluzione del gioco può essere descritta da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ in cui

$$X_n \;=\; \text{“stato del gioco all'istante } n\text{”}, \qquad n \geq 1.$$

1) Qual è la densità discreta di X_1, ossia la distribuzione iniziale della catena di Markov?

2) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

3) Quali sono le classi comunicanti?

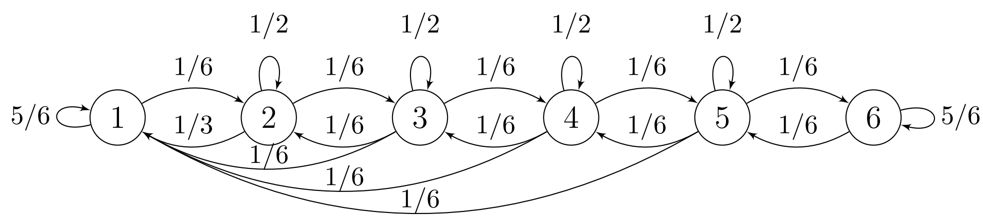
4) Qual è la probabilità di andare dallo stato 5 allo stato 6 in due passi?

1)

X_1	1	2	3	4	5	6
p_{X_1}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$



3) C'è un'unica classe comunicante, che è quindi $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La catena di Markov è dunque irriducibile.

4) Si ha che

$$\pi_{56}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}_{\text{prob. cammino } 5\to5\to6} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}_{\text{prob. cammino } 5\to6\to6} = \frac{2}{9} = 22.22\%.$$