ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
3 febbraio 2021

Esercizio 1

Un gruppo di 100 persone viaggerà domani da Bologna a Roma con 3 differenti treni, che indichiamo con le lettere A, B e C. Più precisamente, 60 persone viaggeranno con il treno A, 25 con il treno B e 15 con il treno C. I tre treni partiranno in ritardo con una probabilità pari al 15% nel caso del treno A, al 10% nel caso del treno B e al 5% nel caso del treno C. Ciascun treno partirà in ritardo o meno indipendentemente da ciò che succederà per gli altri treni. Scegliamo una persona a caso tra le 100 che domani viaggeranno da Bologna a Roma.

1) Sapendo che la persona scelta a caso viaggia con il treno B, con quale probabilità tale persona partirà in ritardo?

2) Qual è la probabilità che la persona scelta a caso viaggi con il treno B e parta in ritardo?

3) Con quale probabilità la persona scelta a caso partirà in ritardo?

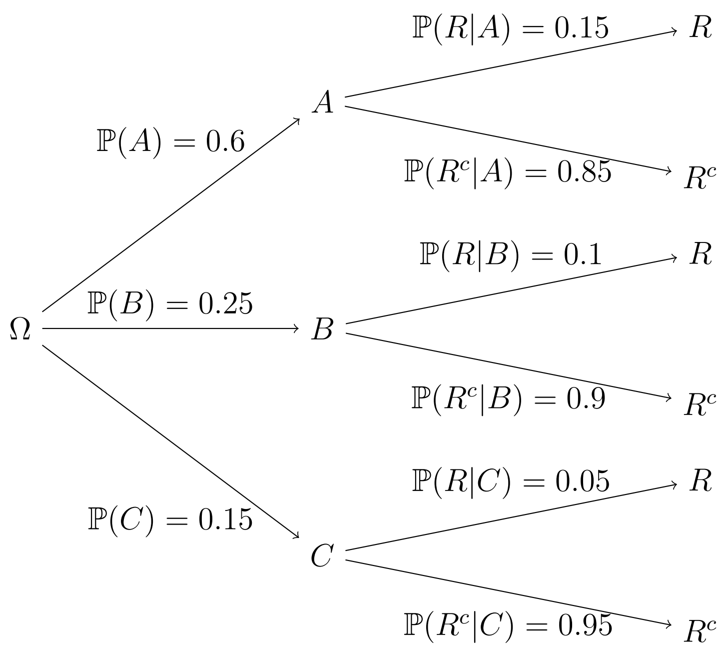
4) Con quale probabilità la persona scelta a caso ha viaggiato con il treno B, sapendo che il suo treno è partito in ritardo?

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“la persona scelta a caso viaggia con il treno } A\text{”},\\
B &= \text{“la persona scelta a caso viaggia con il treno } B\text{”},\\
C &= \text{“la persona scelta a caso viaggia con il treno } C\text{”},\\
R &= \text{“il treno della persona scelta a caso è partito in ritardo”}.
\end{aligned}
$$

Sappiamo che $\mathbb{P}(A) = 0.6$, $\mathbb{P}(B) = 0.25$, $\mathbb{P}(C) = 0.15$, $\mathbb{P}(R|A) = 0.15$, $\mathbb{P}(R|B) = 0.1$, $\mathbb{P}(R|C) = 0.05$. In particolare, abbiamo il seguente diagramma ad albero:



1) $\mathbb{P}(R|B) = 10\%$.

2) Utilizzando la regola della catena, otteniamo

$$\mathbb{P}(B \cap R) \;=\; \mathbb{P}(R|B)\,\mathbb{P}(B) \;=\; 2.5\%.$$

3) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$\mathbb{P}(R) \;=\; \mathbb{P}(R|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R|B)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(R|C)\,\mathbb{P}(C) \;=\; 12.25\%.$$

4) Per la formula di Bayes, si ha che

$$\mathbb{P}(B|R) \;=\; \frac{\mathbb{P}(R|B)\,\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(R)} \;=\; \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.1225} \;\approx\; 20.41\%.$$

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria discreta con densità discreta data da

X	0	1	2	3	4	5
p_X	$\frac{a}{2}$	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

dove a e b sono parametri reali tali che $0 \leq a \leq 1$ e $0 \leq b \leq 1$.

1) Sapendo che $\mathbb{P}(X = 1 | X \leq 3) = \frac{1}{4}$, determinare a e b.

D'ora in avanti si pongano a e b uguali ai valori trovati.

2) Calcolare media e varianza di X.

Sia $Y = \frac{1}{3}X^3$.

3) Determinare supporto e densità discreta di Y.

4) Calcolare $\mathbb{P}(Y = X)$.

Soluzione

1) Dalla definizione di densità discreta, sappiamo che deve valere

$$\frac{a}{2} + b + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{3}{20} \;=\; 1.$$

Sappiamo anche che $\mathbb{P}(X = 1|X \leq 3) = \frac{1}{4}$. Poiché

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1|X \leq 3) \;&=\; \frac{\mathbb{P}(X = 1, X \leq 3)}{\mathbb{P}(X \leq 3)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(X = 1)}{\mathbb{P}(X \leq 3)} \\ &=\; \frac{p_X(1)}{p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3)} \;=\; \frac{b}{\frac{a}{2} + b + \frac{1}{4} + \frac{3}{20}}.\end{aligned}$$

In conclusione otteniamo il seguente sistema nelle incognite a e b:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{3}{20} = 1, \\ \frac{a}{2} + b + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = 4\,b. \end{cases}$$

Quindi $a = \frac{2}{5}$ e $b = \frac{1}{5}$. Perciò la densità discreta di X è data da

X	0	1	2	3	4	5
p_X	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] \;&=\; \sum_i x_i\, p_X(x_i) \;=\; \frac{21}{10}, \\ \mathbb{E}[X^2] \;&=\; \sum_i x_i^2\, p_X(x_i) \;=\; \frac{71}{10}, \\ \mathrm{Var}(X) \;&=\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \;=\; \frac{269}{100}.\end{aligned}$$

3)

Y	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{27}{3}$	$\frac{64}{3}$	$\frac{125}{3}$
p_Y	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

4) Abbiamo che

$$\mathbb{P}(Y = X) \;=\; \mathbb{P}(X^3 = 3X) \;=\; \sum_{i:\, x_i^3 = 3x_i} p_X(x_i) \;=\; p_X(0) \;=\; \frac{1}{5}.$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con funzione di ripartizione

$$F_X(x) \; = \; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2x^2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

1) Determinare la densità f_X della variabile aleatoria X.

2) Calcolare $\mathbb{P}(X \geq 2)$ e $\mathbb{E}[X]$.

Si consideri la variabile aleatoria

$$Y \; = \; \begin{cases} 1, & \text{se } X \leq 1, \\ X + 1, & \text{se } X > 1. \end{cases}$$

3) Calcolare la probabilità che simultaneamente $Y \leq 3$ e $X > 1$.

4) Calcolare $\mathbb{P}(Y \leq 3)$.

Soluzione

1) Si ha che
$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x^3}, & x > 1, \end{cases}$$
dove abbiamo posto arbitrariamente $f_X(0) = 0$ e $f_X(1) = \frac{1}{2}$.

2)
$$\mathbb{P}(X \geq 2) \;=\; 1 - F_X(2) \;=\; \frac{1}{8},$$
$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_0^1 \frac{1}{2} x \,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{5}{4}.$$

3) Dobbiamo calcolare la probabilità $\mathbb{P}(Y \leq 3, X > 1)$. Si ha che
$$\mathbb{P}(Y \leq 3, X > 1) \;=\; \mathbb{P}(X + 1 \leq 3, X > 1) \;=\; \mathbb{P}(1 < X \leq 2) \;=\; F_X(2) - F_X(1) \;=\; \frac{3}{8}.$$

4) Si noti che l'evento $\{Y \leq 3\}$ si verifica se e solo se si verifica l'evento $\{X \leq 1\}$ oppure l'evento $\{X + 1 \leq 3\} \cap \{X > 1\}$. Poiché gli eventi $\{X \leq 1\}$ e $\{X + 1 \leq 3\} \cap \{X > 1\}$ sono disgiunti, per la proprietà di additività otteniamo
$$\mathbb{P}(Y \leq 3) \;=\; \mathbb{P}(X \leq 1) + \mathbb{P}(X + 1 \leq 3, X > 1) \;=\; F_X(1) + \frac{3}{8} \;=\; \frac{7}{8}.$$

Esercizio 4

Consideriamo un buffer in cui possono stare al massimo tre programmi contemporaneamente. Ciascun programma nel buffer può essere terminato in una unità di tempo con probabilità 1/2, indipendentemente dagli altri programmi e da quanto accaduto in precedenza. Inoltre, alla fine di ogni unità di tempo, entra di sicuro nel buffer esattamente un altro programma, purché il buffer non sia al massimo. Tale meccanismo può essere descritto da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ in cui

$$X_n = \text{“n}^{\text{o}}\text{ di programmi nel buffer dopo } n \text{ unità di tempo”}, \qquad n \geq 1.$$

Supponiamo infine che all'inizio (quindi con riferimento a X_0) il buffer sia pieno.

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

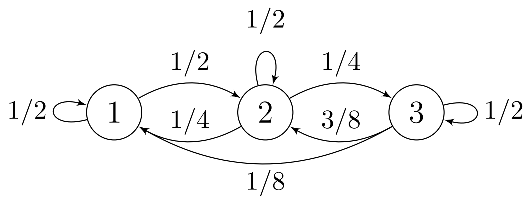
3) Calcolare $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ e $\mathbb{P}(X_2 = 1)$.

4) Calcolare $\mathbb{P}(X_1 = 1 | X_2 = 1)$.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



2) C'è un'unica classe comunicante, che è quindi $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$. La catena di Markov è dunque irriducibile.

3) Sappiamo che $X_0 = 3$, quindi

X_0	1	2	3
p_{X_0}	0	0	1

Inoltre, sappiamo che

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \sum_{i=1,2,3} p_{X_0}(i)\, \pi_{i1}^{(1)} = \pi_{31},$$
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \sum_{i=1,2,3} p_{X_0}(i)\, \pi_{i1}^{(2)} = \pi_{31}^{(2)}.$$

Notiamo che $\pi_{31} = \frac{1}{8} = 12.5\%$ e

$$\pi_{31}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}_{\text{prob. cammino } 3\to3\to1} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 3\to1\to1} + \underbrace{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 3\to2\to1} = \frac{7}{32} = 21.875\%.$$

Quindi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{8}$ e $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{7}{32}$.

4) Utilizzando la formula di Bayes, otteniamo

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 | X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\, \mathbb{P}(X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)} = \frac{\pi_{11} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{7}{32}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{7}{32}} = \frac{2}{7} \approx 28.57\%.$$