ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
13 gennaio 2021

Esercizio 1

Consideriamo due urne, ognuna contenente 5 palline. Nella prima urna ci sono 2 palline bianche e 3 rosse, mentre nella seconda urna ci sono 4 palline bianche e una pallina rossa. Si eseguono due estrazioni procedendo come segue: si estrae una pallina dalla prima urna, dopodiché

- se la pallina estratta è bianca, la si reinserisce nella prima urna e si estrae una pallina dalla seconda urna;
- se la pallina estratta è rossa, la si inserisce nella seconda urna, da cui poi si estrae una pallina.

1) Sapendo che la prima pallina estratta è rossa, qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa alla seconda estrazione?

2) Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa alla seconda estrazione?

3) Sapendo che la seconda pallina estratta è bianca, qual è la probabilità che anche la prima fosse bianca?

4) Qual è la probabilità di ottenere due palline dello stesso colore?

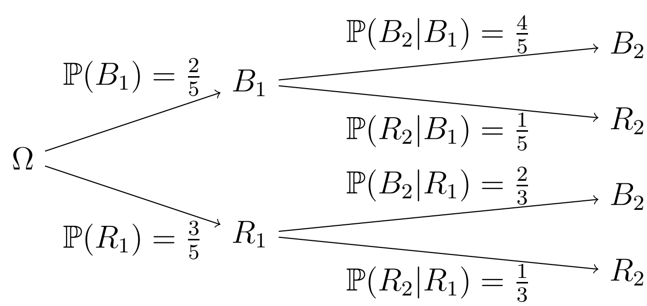
Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$
\begin{aligned}
R_k &= \text{“la pallina estratta alla } k\text{-esima estrazione è rossa”}, \\
B_k &= \text{“la pallina estratta alla } k\text{-esima estrazione è bianca”} \;=\; R_k^c,
\end{aligned}
$$

con $k = 1, 2$.

1) $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{1}{3}$. Più in generale il diagramma ad albero dell'esperimento aleatorio è il seguente:



2) Per la formula delle probabilità totali

$$\mathbb{P}(R_2) \;=\; \mathbb{P}(R_2|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(R_2|R_1)\,\mathbb{P}(R_1) \;=\; \frac{7}{25} \;=\; 28\%.$$

3) Notiamo innanzitutto che $\mathbb{P}(B_2) = 1 - \mathbb{P}(R_2) = \frac{18}{25}$. Quindi, per la formula di Bayes, si ha che

$$\mathbb{P}(B_1|B_2) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B_2|B_1)\,\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(B_2)} \;=\; \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{18}{25}} \;=\; \frac{4}{9} \;\approx\; 44.44\%.$$

4) Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $E = (R_1 \cap R_2) \cup (B_1 \cap B_2)$. Per la proprietà di additività della probabilità, abbiamo che

$$\mathbb{P}(E) \;=\; \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2).$$

Utilizzando la regola della catena, otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \;=\; \mathbb{P}(R_2|R_1)\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(B_2|B_1)\,\mathbb{P}(B_1) \;&=\; \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5} \\
&=\; \frac{13}{25} \;=\; 52\%.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Un dado (equilibrato e a *tre* facce numerate con 1, 2, 3) viene lanciato due volte. Siano X e Y i risultati ottenuti nei due lanci.

1) Determinare la densità discreta congiunta e le marginali di X e Y.

Si considerino le variabili aleatorie $U = XY$ e $V = |X - Y|$.

2) Determinare la densità discreta congiunta e le marginali di U e V.

3) Dire se U e V sono indipendenti.

4) Calcolare $\mathbb{P}(|U - V| \leq 1)$.

Soluzione

1) La densità discreta congiunta e le densità marginali di X e Y sono date dalla seguente tabella:

$X \backslash Y$	1	2	3	p_X
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
p_Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

2) Si ha che

$$
\begin{array}{lcclcc}
\text{se} & (X,Y) = (1,1) & \text{allora} & (U,V) = (1,0), \\
\text{se} & (X,Y) = (1,2) & \text{allora} & (U,V) = (2,1), \\
\text{se} & (X,Y) = (1,3) & \text{allora} & (U,V) = (3,2), \\
\text{se} & (X,Y) = (2,1) & \text{allora} & (U,V) = (2,1), \\
\text{se} & (X,Y) = (2,2) & \text{allora} & (U,V) = (4,0), \\
\text{se} & (X,Y) = (2,3) & \text{allora} & (U,V) = (6,1), \\
\text{se} & (X,Y) = (3,1) & \text{allora} & (U,V) = (3,2), \\
\text{se} & (X,Y) = (3,2) & \text{allora} & (U,V) = (6,1), \\
\text{se} & (X,Y) = (3,3) & \text{allora} & (U,V) = (9,0).
\end{array}
$$

Quindi

$U \backslash V$	0	1	2	p_U
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
4	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
6	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
9	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
p_V	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

3) No, infatti ad esempio $p_{(U,V)}(1,0) \neq p_U(1)\, p_V(0)$.

4) Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|U-V| \leq 1) &= \sum_{i,j:\, |u_i - v_j| \leq 1} p_{(U,V)}(u_i, v_j) \\
&= p_{(U,V)}(1,0) + p_{(U,V)}(1,1) + p_{(U,V)}(1,2) + p_{(U,V)}(2,1) \\
&\quad + p_{(U,V)}(2,2) + p_{(U,V)}(3,2) = \frac{5}{9}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ c, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dove c è un parametro reale strettamente positivo.

1) Dire per quale valore del parametro c la funzione f_X è effettivamente una densità.

D'ora in poi si ponga c uguale al valore trovato al punto precedente.

2) Determinare la funzione di ripartizione di X.

3) Sia Y la variabile aleatoria continua data da $Y = 45X^5 - 2$. Calcolare il valore atteso di Y.

4) Determinare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) $c = \frac{4}{5}$, infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 cx^3\,\mathrm{d}x + \int_1^2 c\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{5}{4}c.$$

2)

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{5}x^4, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}, & 1 \le x \le 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] \;&=\; 45\mathbb{E}[X^5] - 2 \;=\; 45\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 f_X(x)\,\mathrm{d}x - 2 \\ &=\; 36\int_0^1 x^8\,\mathrm{d}x + 36\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x - 2 \;=\; 380. \end{aligned}$$

4) Si noti che

$$\begin{aligned} F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \le x) \;=\; \mathbb{P}\big(45X^5 - 2 \le x\big) \;&=\; \mathbb{P}\left(X^5 \le \frac{x+2}{45}\right) \\ &=\; \mathbb{P}\left(X \le \sqrt[5]{\frac{x+2}{45}}\right) \;=\; F_X\left(\sqrt[5]{\frac{x+2}{45}}\right), \end{aligned}$$

per $x \ge -2$. Quindi

$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \frac{1}{5}\left(\sqrt[5]{\frac{x+2}{45}}\right)^4, & 0 \le \sqrt[5]{\frac{x+2}{45}} \le 1, \\ \frac{4}{5}\sqrt[5]{\frac{x+2}{45}} - \frac{3}{5}, & 0 \le \sqrt[5]{\frac{x+2}{45}} \le 1, \\ 1, & \sqrt[5]{\frac{x+2}{45}} \ge 2 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{(x+2)^4}{45^4}}, & -2 \le x \le 43, \\ \frac{4}{5}\sqrt[5]{\frac{x+2}{45}} - \frac{3}{5}, & 43 \le x \le 1438, \\ 1, & x \ge 1438. \end{cases}$$

Esercizio 4

Una pedina si muove su un circuito circolare a 4 vertici, numerati da 1 a 4. La pedina si trova inizialmente nel vertice 1. Ad ogni passo un giocatore lancia un dado equilibrato a quattro facce:

- se la pedina si trova nello stato 1, essa avanza di una posizione in caso di risultato dispari e di tre posizioni in caso di risultato pari;
- se la pedina si trova nello stato 2, essa avanza di una posizione in caso di risultato dispari, altrimenti salta nello stato 1;
- se la pedina si trova nello stato 3, essa avanza di una posizione in caso di risultato dispari, altrimenti salta nello stato 2;
- se la pedina si trova nello stato 4, essa passa nello stato 1 nel caso in cui il risultato del dado sia 4, altrimenti resta nello stato 4.

La posizione della pedina può essere descritta da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ in cui

$$X_n = \text{"n}^{\text{o}}\text{ del vertice occupato dalla pedina dopo } n \text{ passi"}, \qquad n \geq 1,$$

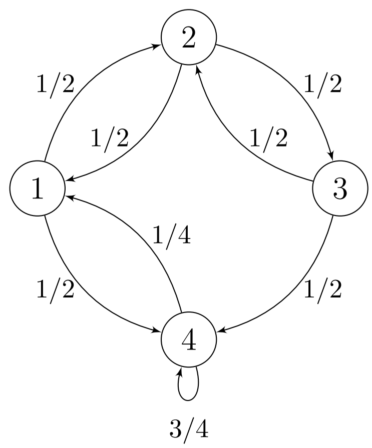
mentre X_0 è la posizione iniziale della pedina.

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.
2) Sapendo che la pedina si trova in 4, qual è la probabilità che si trovi in 1 dopo due passi?
3) Calcolare densità discreta e valore atteso di X_2.
4) Calcolare $\mathbb{P}(X_1 = 2 | X_2 = 1)$.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



2) Dobbiamo calcolare $\pi_{41}^{(2)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{41}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 4\to4\to1} \;=\; \frac{3}{16} \;\approx\; 18.75\%.$$

3) Determiniamo innanzitutto la densità discreta della variabile aleatoria X_2. Sappiamo che $X_0 = 1$, quindi

X_0	1	2	3	4
p_{X_0}	1	0	0	0

Inoltre, sappiamo che

$$\mathbb{P}(X_2 = j) \;=\; \sum_{i=1,2,3,4} p_{X_0}(i)\, \pi_{ij}^{(2)} \;=\; \pi_{1j}^{(2)}, \qquad \forall\, j = 1, 2, 3, 4.$$

Abbiamo che

$$\pi_{11}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1\to2\to1} \;+\; \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 1\to4\to1} \;=\; \frac{3}{8},$$

$$\pi_{12}^{(2)} \;=\; 0,$$

$$\pi_{13}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1\to2\to3} \;=\; \frac{1}{4},$$

$$\pi_{14}^{(2)} \;=\; \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino } 1\to 4\to 4} \;=\; \frac{3}{8}.$$

Quindi

X_2	1	2	3	4
p_{X_2}	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

In conclusione, abbiamo che

$$\mathbb{E}[X_2] \;=\; 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot 0 + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{3}{8} \;=\; \frac{21}{8} \;=\; 2.625.$$

4) Dalla formula di Bayes, si ha che

$$\mathbb{P}(X_1 = 2|X_2 = 1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 2)\,\mathbb{P}(X_1 = 2)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)} \;=\; \frac{\pi_{21}\cdot p_{X_1}(2)}{p_{X_2}(1)}.$$

Notiamo che

$$p_{X_1}(2) \;=\; \mathbb{P}(X_1 = 2) \;=\; \sum_{i=1,2,3,4} p_{X_0}(i)\,\pi_{i2} \;=\; \pi_{12} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Quindi, dato che $p_{X_2}(1) = 3/8$ per quanto visto al punto precedente,

$$\mathbb{P}(X_1 = 2|X_2 = 1) \;=\; \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} \;=\; \frac{2}{3}.$$