ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
18 settembre 2020

Esercizio 1

Consideriamo tre urne: l'urna U_1 contiene 1 pallina bianca e 5 rosse, l'urna U_2 contiene 3 bianche e 3 rosse, l'urna U_3 contiene 5 bianche e 1 rossa. Si lancia un dado a sei facce (equilibrato), dopodiché si estrae una pallina

- dall'urna U_1 se esce 1, 2 o 3;
- dall'urna U_2 se esce 4 o 5;
- dall'urna U_3 se esce 6.

1) Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca dall'urna U_2?
2) Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?
3) Sapendo che è stata estratta una pallina bianca, qual è la probabilità di aver estratto la pallina dall'urna U_1?
4) Effettuo una seconda estrazione, senza reimmissione, dalla stessa urna. Sapendo che alla prima estrazione è stata estratta una pallina bianca, qual è la probabilità di estrarre ancora una bianca?

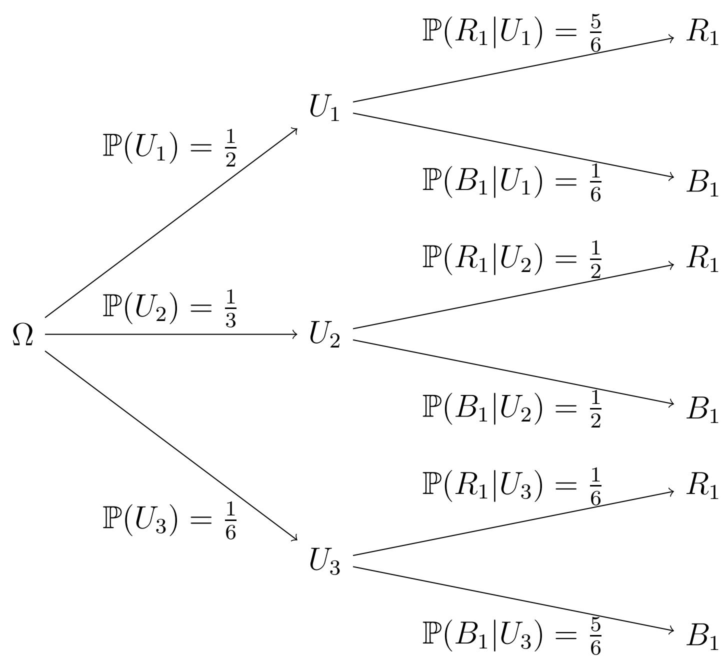
Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned} U_k &= \text{"l'urna scelta per eseguire le estrazioni è la numero } k\text{"}, \\ B_i &= \text{"all'estrazione } i\text{-esima esce una pallina bianca"}, \\ R_i &= \text{"all'estrazione } i\text{-esima esce una pallina rossa"} \;=\; B_i^c, \end{aligned}$$

con $k = 1, 2, 3$ e $i = 1, 2$.

1) $\mathbb{P}(B_1|U_2) = \frac{1}{2}$. Più in generale, l'esperimento aleatorio (fino alla prima estrazione) è descritto dal seguente diagramma ad albero:



2) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$\mathbb{P}(B_1) \;=\; \mathbb{P}(B_1|U_1)\,\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(B_1|U_2)\,\mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}(B_1|U_3)\,\mathbb{P}(U_3) \;=\; \frac{7}{18} \;\approx\; 38.89\%.$$

3) Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(U_1|B_1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B_1|U_1)\,\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(B_1)} \;=\; \frac{3}{14} \;\approx\; 21.43\%.$$

4) Dobbiamo calcolare la seguente probabilità condizionale

$$\mathbb{P}(B_2|B_1) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B_2 \cap B_1)}{\mathbb{P}(B_1)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(B_2 \cap B_1)}{\frac{7}{18}}.$$

Resta da calcolare $\mathbb{P}(B_2 \cap B_1)$. Per la formula delle probabilità totali, si ha che

$$\mathbb{P}(B_2 \cap B_1) \;=\; \mathbb{P}(B_2 \cap B_1 \cap U_1) + \mathbb{P}(B_2 \cap B_1 \cap U_2) + \mathbb{P}(B_2 \cap B_1 \cap U_3).$$

Applicando la regola della catena, otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2 \cap B_1 \cap U_1) \;&=\; \mathbb{P}(B_2|B_1 \cap U_1)\,\mathbb{P}(B_1|U_1)\,\mathbb{P}(U_1) \;=\; 0 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \;=\; 0,\\
\mathbb{P}(B_2 \cap B_1 \cap U_2) \;&=\; \mathbb{P}(B_2|B_1 \cap U_2)\,\mathbb{P}(B_1|U_2)\,\mathbb{P}(U_2) \;=\; \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{15},\\
\mathbb{P}(B_2 \cap B_1 \cap U_3) \;&=\; \mathbb{P}(B_2|B_1 \cap U_3)\,\mathbb{P}(B_1|U_3)\,\mathbb{P}(U_3) \;=\; \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \;=\; \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbb{P}(B_2|B_1) \;=\; \frac{0 + \frac{1}{15} + \frac{1}{9}}{\frac{7}{18}} \;=\; \frac{16}{35} \;\approx\; 45.71\%.$$

Esercizio 2

Consideriamo due urne, A e B. L'urna A contiene due palline rosse e due bianche, mentre l'urna B contiene due palline rosse e tre bianche. Si estrae una pallina da ciascuna urna. Sia

$$X \;=\; \text{“n}^{\text{o}}\text{ di palline rosse estratte”}.$$

Le due estrazioni sono da ritenersi indipendenti.

1) Determinare supporto e densità discreta di X.

2) Calcolare media e varianza di X.

Consideriamo ora una terza urna C contenente due palline rosse e una bianca. Supponiamo che venga estratta anche una pallina dall'urna C (oltre ad estrarre una pallina dall'urna A e una dall'urna B). Sia

$$Z \;=\; \text{“n}^{\text{o}}\text{ di palline rosse estratte dall'urna } C\text{”}.$$

Le tre estrazioni sono da ritenersi indipendenti.

4) Determinare densità discreta congiunta e marginali di X e Z.

5) Calcolare $\mathbb{P}(X + Z \geq 2)$.

Soluzione

1) Notiamo innanzitutto che $\mathcal{S}_X = \{0, 1, 2\}$. Inoltre

$$\mathbb{P}(X=0) \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}, \qquad\qquad \mathbb{P}(X=2) \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}.$$

Poiché $\mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=2)$, si ha che

X	0	1	2
p_X	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

2)

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_i x_i\, p_X(x_i) \;=\; \frac{9}{10},$$

$$\mathbb{E}[X^2] \;=\; \sum_i x_i^2\, p_X(x_i) \;=\; \frac{13}{10},$$

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \;=\; \frac{49}{100}.$$

3) Notiamo innanzitutto che $\mathcal{S}_Z = \{0, 1\}$. Inoltre

Z	0	1
p_Z	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Dato che X e Z sono indipendenti, si ha che $p_{(X,Z)}(x_i, z_j) = p_X(x_i)\, p_Z(z_j)$, quindi

$X \backslash Z$	0	1	p_X
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$
p_Z	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

4) Abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Z \geq 2) \;&=\; \sum_{i,j\,:\, x_i+z_j\geq 2} p_{(X,Z)}(x_i, z_j) \\ &=\; p_{(X,Z)}(1,1) + p_{(X,Z)}(2,0) + p_{(X,Z)}(2,1) \;=\; \frac{8}{15} \;\approx\; 53.33\%.\end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 2c, & 0 \le x \le 1, \\ 2c(2-x), & 1 \le x \le 2, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dove c è un parametro reale strettamente positivo.

1) Dire per quale valore del parametro c la funzione f_X è effettivamente una densità.

D'ora in poi si ponga c uguale al valore trovato al punto precedente.

2) Calcolare media e varianza di X e la probabilità che $X > \frac{1}{2}$.

3) Determinare la funzione di ripartizione di X.

4) Sia Y la variabile aleatoria continua data da $Y = X^3$. Determinare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) $c = \frac{1}{3}$, infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 2c\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2c(2-x)\,\mathrm{d}x \;=\; 3c.$$

2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_1^2 x(2-x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{7}{9},\\
\mathbb{E}[X^2] \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{3}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_1^2 x^2(2-x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{5}{6},\\
\mathrm{Var}(X) \;&=\; \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 \;=\; \frac{5}{6}-\frac{49}{81} \;=\; \frac{37}{162} \;\approx\; 0.2284,\\
\mathbb{P}(X>1/2) \;&=\; \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 1\,\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

3)

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 0,\\ \frac{2}{3}x, & 0 \le x \le 1,\\ \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}, & 1 \le x \le 2,\\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

4) Si noti che

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \le x) \;=\; \mathbb{P}\big(X \le \sqrt[3]{x}\big) \;=\; F_X\big(\sqrt[3]{x}\big).$$

Quindi

$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} 0, & \sqrt[3]{x} \le 0,\\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}, & 0 \le \sqrt[3]{x} \le 1,\\ \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}(\sqrt[3]{x})^2 - \frac{1}{3}, & 1 \le \sqrt[3]{x} \le 2,\\ 1, & \sqrt[3]{x} \ge 2 \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le 0,\\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}, & 0 \le x \le 1,\\ \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}, & 1 \le x \le 8,\\ 1, & x \ge 8. \end{cases}$$

Esercizio 4

Consideriamo un sistema a sei stati numerati da 1 a 6, la cui evoluzione nel tempo è descritta da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$. Ad ogni istante n, si lancia un dado (equilibrato e a sei facce) e sulla base del risultato il sistema evolve come descritto qui di seguito:

- se esce 1, il sistema si sposta nello stato 1;
- se esce un numero strettamente maggiore dello stato presente, il sistema si sposta nello stato immediatamente successivo;
- negli altri casi, il sistema rimane nello stato presente.

1) Determinare la matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

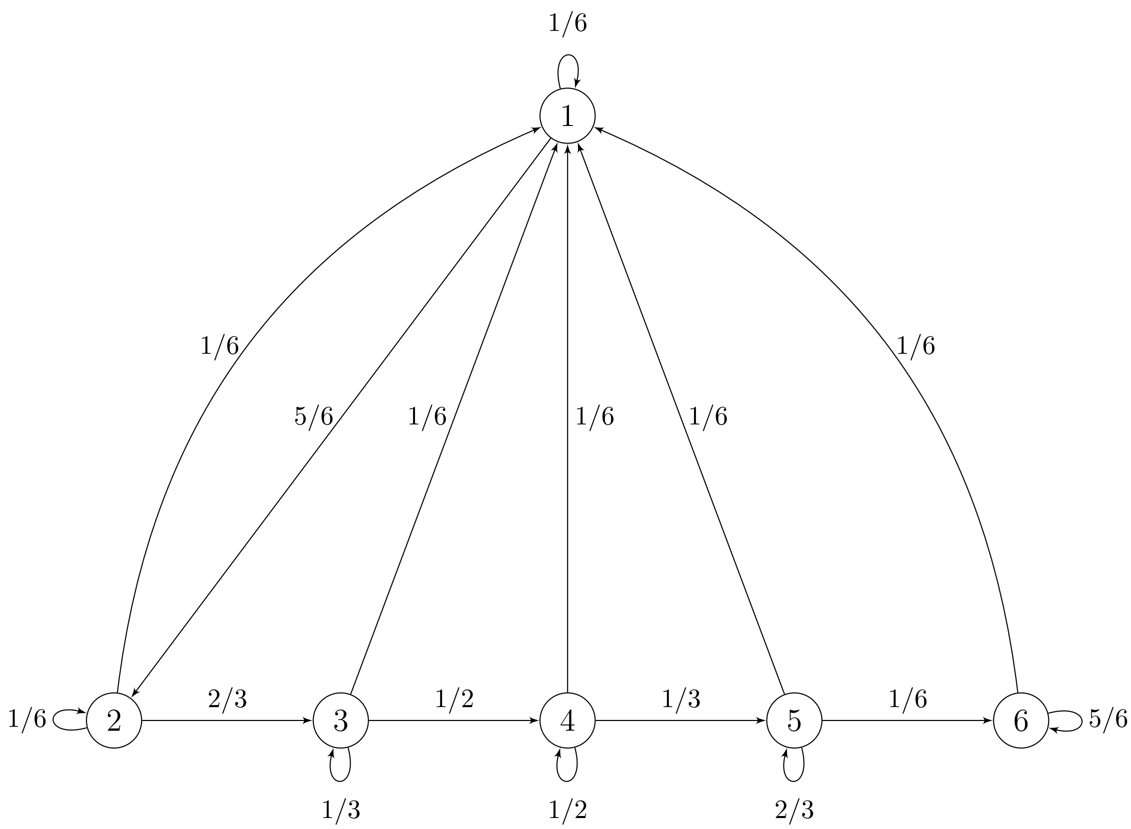
3) Sapendo che all'istante n il sistema si trova nello stato 3, qual è la probabilità che il sistema si trovi nello stato 4 all'istante $n+2$?

4) Viceversa, sapendo che all'istante $n+2$ il sistema si trova nello stato 4, qual è la probabilità che all'istante n il sistema si trovasse nello stato 3?
[Si supponga che $\mathbb{P}(X_n = 3) = 1/5$ e $\mathbb{P}(X_{n+2} = 4) = 1/6$]

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$



2) Esiste un'unica classe comunicante data quindi da $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La catena di Markov è dunque irriducibile.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{34}^{(2)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{34}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 3 \to 3 \to 4} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 3 \to 4 \to 4} = \frac{5}{12} \approx 41.67\%.$$

4) Dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}(X_n = 3 | X_{n+2} = 4).$$

Utilizzando la formula di Bayes, otteniamo

$$\mathbb{P}(X_n = 3 | X_{n+2} = 4) \;=\; \frac{\mathbb{P}(X_{n+2} = 4 | X_n = 3)\, \mathbb{P}(X_n = 3)}{\mathbb{P}(X_{n+2} = 4)}.$$

Dal testo dell'esercizio sappiamo che $\mathbb{P}(X_n = 3) = 1/5$ e $\mathbb{P}(X_{n+2} = 4) = 1/6$. Inoltre $\mathbb{P}(X_{n+2} = 4 | X_n = 3) = \pi_{34}^{(2)}$. Quindi

$$\mathbb{P}(X_n = 3 | X_{n+2} = 4) \;=\; \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{6}} \;=\; \frac{1}{2}.$$