ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
20 luglio 2020

Esercizio 1

Un componente critico del motore di un aereo ha una probabilità pari all'85% di essere funzionante e deve essere sostituito prima della partenza in caso di malfunzionamento. A causa delle difficoltà di verifica, il test di controllo ha una precisione del 95% sui componenti funzionanti (questo significa che se il componente è funzionante, il test conferma che il componente è funzionante solo nel 95% dei casi, nel restante 5% secondo il test il componente è invece difettoso) e una precisione del 99% sui componenti difettosi.

1) Si esegue il test su un componente difettoso. Qual è la probabilità che secondo il test il componente risulti funzionante?

2) Qual è la probabilità che un componente sia funzionante e che, allo stesso tempo, secondo il test il componente risulti difettoso?

3) Si esegue il test su un componente. Qual è la probabilità che secondo il test il componente risulti funzionante?

4) Si esegue il test su un componente e risulta funzionante. Qual è la probabilità che il componente sia in realtà difettoso?

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$
\begin{aligned}
D &= \text{“il componente è difettoso”}, \\
F &= \text{“il componente è funzionante”} \;=\; D^c, \\
T_d &= \text{“secondo il test il componente è difettoso”}, \\
T_f &= \text{“secondo il test il componente è funzionante”} \;=\; T_d^c
\end{aligned}
$$

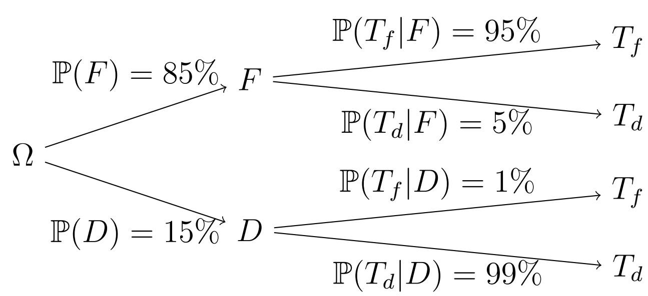
Dal testo dell'esercizio sappiamo che

$$\mathbb{P}(T_f|F) \;=\; 95\%, \qquad\qquad \mathbb{P}(T_d|D) \;=\; 99\%.$$

1) Dato che $T_f = T_d^c$, otteniamo

$$\mathbb{P}(T_f|D) \;=\; 1 - \mathbb{P}(T_d|D) \;=\; 1\%.$$

Analogamente, si ha che $\mathbb{P}(T_d|F) = 5\%$. Abbiamo dunque il seguente diagramma ad albero:



2) Per la regola della catena, si ha che

$$\mathbb{P}(F \cap T_d) \;=\; \mathbb{P}(T_d|F)\,\mathbb{P}(F) \;\approx\; 4.25\%.$$

3) Per la formula delle probabilità totali, si ha che

$$\mathbb{P}(T_f) \;=\; \mathbb{P}(T_f|F)\,\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(T_f|D)\,\mathbb{P}(D) \;=\; 80.9\%.$$

4) Per la formula di Bayes, abbiamo che

$$\mathbb{P}(D|T_f) \;=\; \frac{\mathbb{P}(T_f|D)\,\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T_f)} \;\approx\; 0.185\%.$$

Esercizio 2

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità discreta congiunta data dalla seguente tabella:

$X \setminus Y$	1	3	5
-1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
0	$\frac{1}{3}$	0	0
1	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

1) Trovare le marginali di X e Y e stabilire se X e Y sono indipendenti.

2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

3) Calcolare la probabilità che $X \geq Y$?

4) Siano $U = |XY|$ e $V = Y - X^2$. Determinare densità discreta congiunta e densità marginali di U e V.

Soluzione

1) Completando la tabella con le densità marginali, si ottiene:

$X \backslash Y$	1	3	5	p_X
-1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
p_Y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Si deduce quindi che X e Y non sono indipendenti, infatti ad esempio $p_{(X,Y)}(-1,1) \neq p_X(-1)p_Y(1)$.

2) Si ha che

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_i x_i\, p_X(x_i) = 0, \\
\mathbb{E}[Y] &= \sum_j y_j\, p_Y(y_j) = 2, \\
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = -\frac{1}{9}, \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = -\frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

3) Abbiamo che

$$
\mathbb{P}(X \geq Y) = \sum_{i,j\,:\, x_i \geq y_j} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = p_{(X,Y)}(1,1) = \frac{2}{9}.
$$

4) Si ha che

$$
\begin{array}{lllll}
\text{se} & (X,Y) = (-1,1) & \text{allora} & (U,V) = (1,0), \\
\text{se} & (X,Y) = (-1,3) & \text{allora} & (U,V) = (3,2), \\
\text{se} & (X,Y) = (-1,5) & \text{allora} & (U,V) = (5,4), \\
\text{se} & (X,Y) = (0,1) & \text{allora} & (U,V) = (0,1), \\
\text{se} & (X,Y) = (0,3) & \text{allora} & (U,V) = (0,3), \\
\text{se} & (X,Y) = (0,5) & \text{allora} & (U,V) = (0,5), \\
\text{se} & (X,Y) = (1,1) & \text{allora} & (U,V) = (1,0), \\
\text{se} & (X,Y) = (1,3) & \text{allora} & (U,V) = (3,2), \\
\text{se} & (X,Y) = (1,5) & \text{allora} & (U,V) = (5,4).
\end{array}
$$

Quindi

$U \backslash V$	0	1	2	3	4	5	p_U
0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
p_V	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	1

Esercizio 3

La lunghezza (in cm) di una sbarretta costruita da una stampante 3D può essere descritta tramite una variabile aleatoria X con distribuzione $\mathcal{N}(10, 0.0025)$, ovvero X è una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \; = \; \frac{1}{0.05\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(x-10)^2}{0.0025}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1) Scrivere l'espressione della v.a. Z che si ottiene standardizzando X. Qual è la legge di Z?

2) Determinare la probabilità che una sbarretta abbia lunghezza inferiore o uguale a 10 cm.

3) Una sbarretta è considerata accettabile solamente se ha una lunghezza compresa tra $10 - 0.05$ cm e $10 + 0.05$ cm. Qual è la probabilità che una sbarretta venga scartata? [Si esprima il risultato nella forma $1 - (\Phi(x) - \Phi(-x))$, per qualche $x > 0$]

4) Determinare ℓ in modo tale che la percentuale di sbarrette che ha una lunghezza inferiore o uguale a ℓ sia pari al 10%. [Si usi che $\Phi^{-1}(0.1) \approx -1.282$, dove Φ^{-1} denota la funzione inversa di Φ]

Soluzione

1) Standardizzando X si ottiene la variabile aleatoria

$$Z \;=\; \frac{X-10}{0.05}$$

che ha legge normale standard, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2) Abbiamo che

$$\mathbb{P}(X \le 10) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{standardizzazione}}}{=} \mathbb{P}\left(\frac{X-10}{0.05} \le \frac{10-10}{0.05}\right) \;=\; \mathbb{P}(Z \le 0) \;=\; \Phi(0) \;=\; \frac{1}{2}.$$

3) Si noti che l'evento "la sbarretta viene scartata" è dato da

$$\{10-0.05 \le X \le 10+0.05\}^c.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{10-0.05 \le X \le 10+0.05\}^c\big) \;&=\; 1-\mathbb{P}(10-0.05 \le X \le 10+0.05) \\
\underset{\substack{\uparrow \\ \text{standardizzazione}}}{=} \;& 1-\mathbb{P}\left(-\frac{0.05}{0.05} \le \frac{X-10}{0.05} \le \frac{0.05}{0.05}\right) \;=\; 1-\mathbb{P}(-1 \le Z \le 1) \\
=\; 1-\big(\Phi(1)-\Phi(-1)\big) \;&=\; 1-\big(\Phi(1)-\big(1-\Phi(1)\big)\big) \;=\; 2\,\big(1-\Phi(1)\big) \;\approx\; 31.73\%.
\end{aligned}$$

4) Dobbiamo trovare ℓ tale che

$$\mathbb{P}(X \le \ell) \;=\; 0.1.$$

Standardizzando, possiamo riscrivere questa uguaglianza in termini di Z:

$$\mathbb{P}\left(Z \le \frac{\ell-10}{0.05}\right) \;=\; 0.1.$$

Quest'ultima uguaglianza può essere riscritta in termini di Φ, la funzione di ripartizione di Z:

$$\Phi\left(\frac{\ell-10}{0.05}\right) \;=\; 0.1.$$

Quindi

$$\frac{\ell-10}{0.05} \;=\; \Phi^{-1}(0.1) \;\approx\; -1.282,$$

da cui si ottiene $\ell \;\approx\; 9.9359$.

Esercizio 4

Un sistema si può trovare in uno dei seguenti 4 stati:

1) Rotto, *2) Fermo*, *3) Piano*, *4) Veloce*.

- Se il sistema è nello stato *Rotto*, passa nello stato *Fermo* con probabilità 1/4, altrimenti resta nello stato in cui è.
- Se il sistema è nello stato *Fermo*, passa nello stato *Piano* con probabilità 3/4, altrimenti si rompe.
- Se il sistema è nello stato *Piano*, passa nello stato *Veloce* con probabilità 3/4, altrimenti si rompe.
- Se il sistema è nello stato *Veloce*, resta nello stato *Veloce* con probabilità 1/2, altrimenti si rompe.

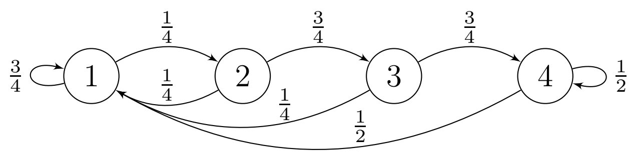
Lo stato del sistema può essere descritto da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$.

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.
2) Quali sono le classi comunicanti?
3) Se il sistema si trova nello stato *Piano* qual è la probabilità che dopo tre istanti sia nello stato *Rotto*?
4) Se il sistema si trova nello stato *Piano* qual è la probabilità che dopo tre istanti, e solo dopo tre istanti, sia nello stato *Rotto*?

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\Pi \; = \; \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



2) C'è un'unica classe comunicante, che è dunque $\{1, 2, 3\}$.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{31}^{(3)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{31}^{(3)} \; = \; \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino } 3\to1\to1\to1} \; + \; \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}_{\text{prob. cammino } 3\to1\to2\to1} \; + \; \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 3\to4\to4\to1}$$
$$+ \; \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}_{\text{prob. cammino } 3\to4\to1\to1} \; = \; \frac{5}{8} \; = \; 62.5\%.$$

4) Dobbiamo escludere dal calcolo di $\pi_{31}^{(3)}$ i cammini che hanno come stato intermedio lo stato *Rotto*:

$$\text{Probabilità} \; = \; \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 3\to4\to4\to1} \; = \; \frac{3}{16} \; = \; 18.75\%.$$