ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
30 giugno 2020

Esercizio 1

Si lancia 5 volte una moneta equilibrata. Dopodiché si riempie un'urna con 1 pallina bianca e con un numero di palline rosse pari al numero di volte che è uscita testa.

1) Qual è la probabilità che l'urna contenga solo la pallina bianca?

2) Determinare la probabilità che, nei 5 lanci della moneta, testa esca k volte, per ogni $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$?

Si estrae una pallina dall'urna.

3) Qual è la probabilità che sia bianca?

4) Sapendo che è uscita la pallina bianca, determinare la probabilità che ora l'urna sia vuota.

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned} T_k &= \text{“nei 5 lanci della moneta, testa è uscita } k \text{ volte”}, \qquad k = 1,2,3,4,5, \\ B &= \text{“si estrae la pallina bianca”}, \\ R &= \text{“si estrae una pallina rossa”} \;=\; B^c. \end{aligned}$$

1) C'è solo la pallina bianca quando si verifica l'evento T_0. Utilizziamo le disposizioni con ripetizione per calcolare la probabilità di T_0: i casi possibili sono $2^5 = 32$, mentre c'è un solo caso favorevole (esce sempre croce). Quindi

$$\mathbb{P}(T_0) \;=\; \frac{1}{32} \;=\; 3.125\%.$$

2) Dobbiamo determinare $\mathbb{P}(T_k)$. Utilizzando le disposizioni con ripetizione abbiamo che i casi possibili sono 2^5, mentre i casi favorevoli relativi all'evento T_k sono pari a $\binom{5}{k}$ (dove $\binom{5}{k}$ è il numero di possibili configurazioni; in particolare, scegliere una configurazione significa dire quali sono i lanci in cui esce testa). Quindi otteniamo

$$\mathbb{P}(T_k) \;=\; \frac{\binom{5}{k}}{2^5}, \qquad k = 0,1,2,3,4,5.$$

3) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(B|T_k)\,\mathbb{P}(T_k) \;=\; \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{1+k}\,\frac{\binom{5}{k}}{2^5} \;=\; \frac{21}{64} \;\approx\; 32.81\%.$$

4) Per la formula di Bayes, abbiamo che

$$\mathbb{P}(T_0|B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B|T_0)\,\mathbb{P}(T_0)}{\mathbb{P}(B)} \;=\; \frac{\frac{1}{32}}{\frac{21}{64}} \;=\; \frac{2}{21} \;\approx\; 9.52\%.$$

Esercizio 2

Ho un portamonete in cui ci sono due monete da 1 euro, una moneta da 50 centesimi, tre monete da 20 centesimi e due monete da 10 centesimi. Perdo una moneta, ma non so quale. Sia X la v.a. che indica l'ammontare (espresso in euro) presente nel portamonete dopo aver perso la moneta.

1) Qual è la probabilità di aver perso una moneta da 1 euro?

2) Determinare supporto e densità discreta di X.

3) Sia $Y = [X]$ la parte intera di X, ovvero Y è il più grande intero minore o uguale a X (detto altrimenti, Y è il valore in euro senza centesimi). Determinare supporto e densità discreta di Y.

4) Calcolare $\mathbb{P}(X = 3.10|Y = 3)$.

Soluzione

1) Dato che nel portamonete ci sono in totale otto monete, la probabilità di perdere una moneta è pari a $\frac{1}{8}$. Quindi

$$\mathbb{P}(\text{“aver perso una moneta da 1 euro”}) = \frac{2}{8}.$$

2) Procedendo come nel punto 1), si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{“aver perso una moneta da 50 centesimi”}) &= \frac{1}{8}, \\
\mathbb{P}(\text{“aver perso una moneta da 20 centesimi”}) &= \frac{3}{8}, \\
\mathbb{P}(\text{“aver perso una moneta da 10 centesimi”}) &= \frac{2}{8},
\end{aligned}$$

Notiamo che (l'ammontare iniziale è pari a 3 euro e 30 centesimi)

$$\begin{aligned}
\{X = 2.30\} &= \text{“aver perso una moneta da 1 euro”}, \\
\{X = 2.80\} &= \text{“aver perso una moneta da 50 centesimi”}, \\
\{X = 3.10\} &= \text{“aver perso una moneta da 20 centesimi”}, \\
\{X = 3.20\} &= \text{“aver perso una moneta da 10 centesimi”}.
\end{aligned}$$

Quindi $\mathcal{S}_X = \{2.30, 2.80, 3.10, 3.20\}$ e la densità discreta è data dalla seguente tabella:

X	2.30	2.80	3.10	3.20
p_X	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

3) Abbiamo che

$$\begin{aligned}
X = 2.30 &\quad\Longrightarrow\quad Y = 2, \\
X = 2.80 &\quad\Longrightarrow\quad Y = 2, \\
X = 3.10 &\quad\Longrightarrow\quad Y = 3, \\
X = 3.20 &\quad\Longrightarrow\quad Y = 3.
\end{aligned}$$

Quindi

Y	2	3
p_Y	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

4) Dalla definizione di probabilità condizionale, si ha che

$$\mathbb{P}(X = 3.10|Y = 3) = \frac{\mathbb{P}(\{X = 3.10\} \cap \{Y = 3\})}{\mathbb{P}(Y = 3)}.$$

Poiché $\{Y = 3\} = \{X = 3.10\} \cup \{X = 3.20\}$, segue che $\{X = 3.10\} \cap \{Y = 3\} = \{X = 3.10\}$. Quindi

$$\mathbb{P}(X = 3.10|Y = 3) = \frac{\mathbb{P}(X = 3.10)}{\mathbb{P}(Y = 3)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}, & a \le x \le 3a, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dove a è un parametro reale strettamente positivo.

1) Dire per quale valore del parametro a la funzione f_X è effettivamente una densità.

D'ora in poi si ponga a uguale al valore trovato al punto precedente.

2) Determinare la funzione di ripartizione di X.

3) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

Si consideri la variabile aleatoria discreta

$$Y \;=\; 1_{\{X \ge 1\}} \;=\; \begin{cases} 1, & \text{se } X \ge 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4) Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

Soluzione

1) $a = \frac{2}{3}$, infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^{3a} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{4}{9a^2}.$$

2)

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{9}{8} - \frac{1}{2x^2}, & \frac{2}{3} \le x \le 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

3)

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\frac{2}{3}}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; 1.$$

4) La v.a. Y ha distribuzione di Bernoulli e densità discreta data da

Y	0	1
p_Y	$1 - \mathbb{P}(X \ge 1)$	$\mathbb{P}(X \ge 1)$

Quindi

$$\mathbb{E}[Y] \;=\; 0 \cdot \big(1 - \mathbb{P}(X \ge 1)\big) + 1 \cdot \mathbb{P}(X \ge 1) \;=\; \mathbb{P}(X \ge 1) \;=\; \int_1^2 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{3}{8}.$$

Esercizio 4

Consideriamo la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ con spazio degli stati $\mathcal{S} = \{1,2,3\}$ e matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ p & 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

con $0 < p < 1$.

1) Disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

3) Determinare la probabilità di trovarsi nello stato 2 al tempo $n = 4$ sapendo che al tempo $n = 2$ si è nello stato 1.

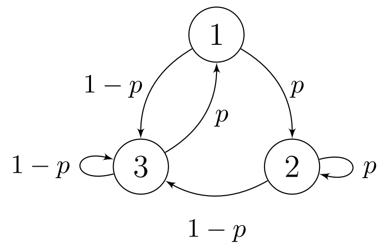
4) Supponiamo che la densità discreta di X_1 sia data da

X_1	1	2	3
p_{X_1}	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Determinare la densità discreta di X_2.

Soluzione

1)



2) C'è un'unica classe comunicante, che è dunque $\{1,2,3\}$.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{12}^{(2)}$. A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{12}^{(2)} = \underbrace{p \cdot p}_{\text{prob. cammino } 1 \to 2 \to 2} = p^2.$$

4) La densità discreta di X_2 è data dalla formula $\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_2}} = \vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{X_1}} \Pi$, quindi

X_2	1	2	3
p_{X_2}	$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{2}p$	$1-p$