ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
16 giugno 2020

Esercizio 1

Ci sono due urne U_1 e U_2. All'interno dell'urna U_1 ci sono 4 palline rosse e 6 palline nere, mentre l'urna U_2 è inizialmente vuota. Si estraggono due palline dall'urna U_1 e si inseriscono nell'urna U_2. Dopodiché, si estrae una pallina dall'urna U_2.

1) Determinare la probabilità di estrarre due palline di diverso colore dall'urna U_1.

2) Sapendo che sono state estratte due palline rosse dall'urna U_1, qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna U_2?

3) Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna U_2?

4) Sapendo di aver estratto una pallina rossa dall'urna U_2, qual è la probabilità che la pallina rimasta nell'urna sia nera?

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned}
E_1^{rr} &= \text{“si estraggono due palline rosse dall'urna } U_1\text{”}, \\
E_1^{nn} &= \text{“si estraggono due palline nere dall'urna } U_1\text{”}, \\
E_1^{rn} &= \text{“si estraggono due palline di diverso colore dall'urna } U_1\text{”}, \\
E_2^{r} &= \text{“si estrae una pallina rossa dall'urna } U_2\text{”}, \\
E_2^{n} &= \text{“si estrae una pallina nera dall'urna } U_2\text{”} \;=\; (E_2^r)^c.
\end{aligned}$$

1) $\mathbb{P}(E_1^{rn}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15} \approx 53.33\%$.

2) Abbiamo che $\mathbb{P}(E_2^r|E_1^{rr}) = 1$.

3) Per la formula delle probabilità totali, si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_2^r) &= \mathbb{P}(E_2^r|E_1^{rr})\,\mathbb{P}(E_1^{rr}) + \mathbb{P}(E_2^r|E_1^{nn})\,\mathbb{P}(E_1^{nn}) + \mathbb{P}(E_2^r|E_1^{rn})\,\mathbb{P}(E_1^{rn}) \\
&= 1 \cdot \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} + 0 \cdot \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} \;=\; \frac{2}{5} \;=\; 40\%.
\end{aligned}$$

4) Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(E_1^{rn}|E_2^r) \;=\; \frac{\mathbb{P}(E_2^r|E_1^{rn})\,\mathbb{P}(E_1^{rn})}{\mathbb{P}(E_2^r)} \;=\; \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}}{\frac{2}{5}} \;=\; \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}} \;=\; \frac{2}{3} \;\approx\; 66.67\%.$$

Esercizio 2

Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità discreta congiunta data dalla seguente tabella:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$
0	0	$\frac{1}{20}$	0
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	0

1) Trovare le marginali di X e Y e calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

2) Calcolare la probabilità che $X < Y$?

3) Siano $U = \min\{X, Y\}$ e $V = \max\{X, Y\}$. Calcolare $\mathbb{E}[UV]$.

4) Determinare densità discreta congiunta e densità marginali di U e V.

Soluzione

1) Completando la tabella con le densità marginali, si ottiene:

$X \backslash Y$	-1	0	1	p_X
-1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{7}{10}$
0	0	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{4}$
p_Y	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

Quindi si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_i x_i\, p_X(x_i) = -\frac{9}{20} = -0.45, \\
\mathbb{E}[Y] &= \sum_j y_j\, p_Y(y_j) = -\frac{11}{20} = -0.55, \\
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \frac{3}{20} = 0.15, \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = -\frac{39}{400} = -0.0975.
\end{aligned}$$

2) Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{i,j\,:\,x_i<y_j} p_{(X,Y)}(x_i, y_j) \\
&= p_{(X,Y)}(-1,0) + p_{(X,Y)}(-1,1) + p_{(X,Y)}(0,1) = \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

3) Notiamo che $UV = XY$, quindi dal punto 1) si ha che

$$\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[XY] = \frac{3}{20} = 0.15.$$

Si può altrimenti procedere nel modo usuale come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[UV] &= \mathbb{E}[\min\{X,Y\}\max\{X,Y\}] = \sum_{i,j} \min\{x_i,y_j\}\max\{x_i,y_j\}\, p_{(X,Y)}(x_i,y_j) \\
&= p_{(X,Y)}(-1,-1) - p_{(X,Y)}(-1,1) - p_{(X,Y)}(1,-1) = \frac{3}{20} = 0.15.
\end{aligned}$$

4) Si ha che

$$\begin{aligned}
&\text{se} \quad (X,Y) = (-1,-1) \quad \text{allora} \quad (U,V) = (-1,-1), \\
&\text{se} \quad (X,Y) = (-1,0) \quad \text{allora} \quad (U,V) = (-1,0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{se} & (X,Y) & = & (-1,1) & \text{allora} & (U,V) & = & (-1,1), \\
\text{se} & (X,Y) & = & (0,-1) & \text{allora} & (U,V) & = & (-1,0), \\
\text{se} & (X,Y) & = & (0,0) & \text{allora} & (U,V) & = & (0,0), \\
\text{se} & (X,Y) & = & (0,1) & \text{allora} & (U,V) & = & (0,1), \\
\text{se} & (X,Y) & = & (1,-1) & \text{allora} & (U,V) & = & (-1,1), \\
\text{se} & (X,Y) & = & (1,0) & \text{allora} & (U,V) & = & (0,1), \\
\text{se} & (X,Y) & = & (1,1) & \text{allora} & (U,V) & = & (1,1).
\end{array}
$$

Quindi

$U \backslash V$	-1	0	1	p_U
-1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{10}$
0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
1	0	0	0	0
p_V	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

Esercizio 3

Sia X il tempo di attesa (misurato in minuti) per ricevere una telefonata. Supponiamo che X sia una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{a}{(1+x)^3}, & x > 0, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dove a è un parametro reale fissato.

1) Determinare a in modo tale che f_X sia effettivamente una densità.

2) Calcolare la probabilità di dover attendere almeno t minuti e la probabilità di dover attendere almeno $2t$ minuti.

3) Sapendo di aver atteso t minuti, determinare la probabilità di dover attendere almeno altri t minuti.

4) Sia Y la v.a. continua data da $Y = 3X + 2$. Trovare la densità di Y.

Soluzione

1) Notiamo che $f_X(x) \geq 0$ per ogni x se e solo se $a \geq 0$. Inoltre

$$1 \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{a}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{a}{2}\left[\frac{1}{(1+x)^2}\right]_0^{+\infty} \;=\; \frac{a}{2},$$

da cui si ottiene $a = 2$.

2) Si ottiene (supponendo $t \geq 0$, altrimenti le probabilità richieste sono pari a 1)

$$\mathbb{P}(X \geq t) \;=\; \int_t^{+\infty} \frac{2}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{(1+t)^2}, \qquad\qquad \mathbb{P}(X \geq 2t) \;=\; \frac{1}{(1+2t)^2}.$$

3) Si ha che (supponendo $t \geq 0$, altrimenti si ottiene 1)

$$\mathbb{P}(X \geq 2t | X \geq t) \;=\; \frac{\mathbb{P}(X \geq 2t, X \geq t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(X \geq 2t)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \;=\; \left(\frac{1+t}{1+2t}\right)^2.$$

4) Calcoliamo innanzitutto la funzione di ripartizione di Y:

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \leq x) \;=\; \mathbb{P}(3X + 2 \leq x) \;=\; \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x-2}{3}\right) \;=\; F_X\left(\frac{x-2}{3}\right).$$

Derivando rispetto alla variabile x, otteniamo

$$f_Y(x) \;=\; f_X\left(\frac{x-2}{3}\right)\frac{1}{3} \;=\; \begin{cases} \dfrac{2}{\left(1+\frac{x-2}{3}\right)^3}\frac{1}{3}, & \frac{x-2}{3} > 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi, in conclusione,

$$f_Y(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{18}{(1+x)^3}, & x > 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 4

Un sistema a 5 stati evolve secondo le seguenti regole:

- dallo stato 1 ci si sposta nello stato 2;
- dagli stati 2, 3, 4 ci si sposta nello stato precedente o nello stato seguente con probabilità pari rispettivamente a 1/3 e 2/3;
- dallo stato 5 ci si sposta nello stato precedente con probabilità 1/3 e si rimane nello stesso con probabilità 2/3.

Il gioco può essere descritto da una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 1}$ in cui

$$X_n \;=\; \text{“stato del sistema all'istante } n\text{”}, \qquad n \geq 1.$$

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Quali sono le classi comunicanti?

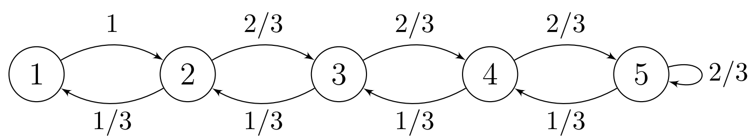
3) Sapendo che al tempo n ci si trova nello stato 1, qual è la probabilità di trovarsi nello stato 1 al tempo $n+3$?

4) Trovare la distribuzione invariante del sistema.

Soluzione

1) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\Pi \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



2) C'è un'unica classe comunicante, ovvero $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La catena di Markov è dunque irriducibile.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{11}^{(3)}$. A partire dal grafo orientato, notiamo che

$$\pi_{11}^{(3)} \;=\; 0.$$

4) Ricordiamo che una distribuzione invariante è un vettore riga $\vec{\boldsymbol{\pi}} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5)$ tale che

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \vec{\boldsymbol{\pi}}\,\Pi \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{5} \pi_i \;=\; 1.$$

Queste due uguaglianze corrispondono al seguente sistema:

$$\begin{cases} \pi_1 \;=\; \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2 \;=\; \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_3 \;=\; \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_4 \\ \pi_4 \;=\; \frac{2}{3}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_5 \\ \pi_5 \;=\; \frac{2}{3}\pi_4 + \frac{2}{3}\pi_5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 \;=\; 1. \end{cases}$$

Ponendo $\pi_1 = x$, si ottiene dalle prime quattro equazioni: $\pi_2 = 3x$, $\pi_3 = 6x$, $\pi_4 = 12x$, $\pi_5 = 24x$. La quinta equazione, ovvero $\pi_5 = \frac{2}{3}\pi_4 + \frac{2}{3}\pi_5$, è automaticamente verificata. Resta dunque la sesta e ultima equazione, che diventa

$$x + 3x + 6x + 12x + 24x \;=\; 1.$$

Quindi $x = \frac{1}{46}$ e

$$\vec{\boldsymbol{\pi}} \;=\; \left(\frac{1}{46}, \frac{3}{46}, \frac{6}{46}, \frac{12}{46}, \frac{24}{46}\right).$$