ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
10 febbraio 2020

Esercizio 1

Bernardo sta per cercare frettolosamente una lettera che si trova in uno degli n cassetti dell'armadio del suo ufficio. Sappiamo che:

- la lettera si trova con uguale probabilità in uno degli n cassetti;
- se la lettera si trova nel cassetto k, la probabilità che Bernardo la trovi è p, con $0 < p < 1$ (dato che Bernardo ha fretta, non è detto che trovi la lettera, anche se sta cercando nel cassetto giusto).

1) Con quale probabilità la lettera si trova nel cassetto k, con k numero naturale compreso tra 1 ed n?

2) Con quale probabilità Bernardo trova la lettera nel cassetto k?

3) Bernardo ha appena controllato frettolosamente il primo cassetto e non ha trovato la lettera. Con quale probabilità la lettera si trova nel primo cassetto?

4) Con quale probabilità Bernardo trova la lettera se cerca in tutti gli n cassetti?

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$
\begin{aligned}
A_k &= \text{“la lettera di trova nel cassetto } k\text{”}, \\
B_k &= \text{“Bernardo trova la lettera nel cassetto } k\text{”},
\end{aligned}
$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$.

1) $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$, per ogni $k = 1, \ldots, n$.

2) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$
\mathbb{P}(B_k) \;=\; \mathbb{P}(B_k|A_k)P(A_k) + \mathbb{P}(B_k|A_k^c)\mathbb{P}(A_k^c) \;=\; p \cdot \frac{1}{n} + 0 \;=\; \frac{p}{n}.
$$

3) Per la formula di Bayes

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1|B_1^c) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B_1^c|A_1)\,\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_1^c)} \;&=\; \frac{\mathbb{P}(B_1^c|A_1)\,\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B_1^c|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1^c|A_1^c)\mathbb{P}(A_1^c)} \\
&=\; \frac{(1-p)\frac{1}{n}}{(1-p)\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}} \;=\; \frac{1-p}{n-p}.
\end{aligned}
$$

4) Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Notiamo che gli eventi $B_1, \ldots, B_n$ sono tra loro disgiunti (infatti se si verifica ad esempio B_i è impossibile che si verifichi un altro evento B_j, con $i \neq j$). Allora, per la proprietà di additività della probabilità, si ha che

$$
\mathbb{P}(B_1 \cup \cdots \cup B_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \;=\; p.
$$

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria discreta con densità discreta data da

X	-1	0	1	2	3	5
p_X	0.1	0.3	0.15	0.15	0.2	0.1

1) Determinare la funzione di ripartizione di X.

2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[-2X+4]$, $\mathbb{E}[|X|]$ e $\mathrm{Var}(X)$.

3) Sia $Y = |X-1|$. Determinare la densità discreta di Y.

Sia ora $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. tutte aventi la stessa distribuzione di X.

4) Calcolare la probabilità $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{500} \leq 750)$ in modo approssimato, facendo uso del teorema centrale del limite. [Si esprima il risultato nella forma $\Phi(x)$, per qualche $x > 0$]

Soluzione

1) Sappiamo che

$$F_X(x) \;=\; \sum_{x_i \le x} p_X(x_i).$$

Quindi

$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.1, & -1 \le x < 0, \\ 0.4, & 0 \le x < 1, \\ 0.55, & 1 \le x < 2, \\ 0.7, & 2 \le x < 3, \\ 0.9, & 3 \le x < 5, \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] \;&=\; \sum_i x_i\, p_X(x_i) \;=\; 1.45, \\ \mathbb{E}[X^2] \;&=\; \sum_i x_i^2\, p_X(x_i) \;=\; 5.15, \\ \mathbb{E}[-2X+4] \;&=\; -2\cdot\mathbb{E}[X]+4 \;=\; 1.10, \\ \mathbb{E}[|X|] \;&=\; \sum_i |x_i|\, p_X(x_i) \;=\; 1.65, \\ \mathrm{Var}(X) \;&=\; \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \;=\; 3.0475. \end{aligned}$$

3)

Y	0	1	2	4
p_Y	0.15	0.45	0.3	0.1

4) Il risultato è $\Phi(0.6404) \simeq 0.7390$. Infatti, siano $\mu = \mathbb{E}[X] = 1.45$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 3.0475$ e

$$\begin{aligned} \bar{X}_n \;&=\; \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}, \\ \bar{Z}_n \;&=\; \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Dal teorema centrale del limite segue che $\bar{Z}_n$ ha approssimativamente distribuzione normale standard, quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{500} \le 750) \;&=\; \mathbb{P}(\bar{X}_{500} \le 1.5) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{standardizzazione}}}{=} \mathbb{P}\left(\bar{Z}_{500} \le \frac{1.5-1.45}{\frac{\sqrt{3.0475}}{\sqrt{500}}}\right) \\ &\simeq\; \mathbb{P}(\bar{Z}_{1000} \le 0.6404) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TCL}}}{\simeq} \Phi(0.6404) \;\simeq\; 0.7390. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \geq a, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dove a è un parametro reale strettamente positivo.

1) Dire per quale valore del parametro a la funzione f_X è effettivamente una densità.

D'ora in poi si ponga a uguale al valore trovato al punto precedente.

2) Determinare la funzione di ripartizione di X.

3) Calcolare $\mathbb{P}(X \geq x)$, per ogni $x \geq 1$.

Si consideri la variabile aleatoria

$$Y \;=\; \begin{cases} X^2, & \text{se } X \leq 2, \\ 5, & \text{se } X > 2. \end{cases}$$

4) Determinare la funzione di ripartizione di Y.

Soluzione

1) $a = 1$, infatti
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{a}.$$

2)
$$F_X(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

3) $\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F_X(x) = \frac{1}{x}$, per ogni $x \geq 1$.

4) Si noti che
$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}(Y \leq x) \;=\; \mathbb{P}\big(X^2 \leq x, X \leq 2\big) + \mathbb{P}\big(5 \leq x, X > 2\big).$$

Restano dunque da calcolare le probabilità $\mathbb{P}(X^2 \leq x, X \leq 2)$ e $\mathbb{P}(5 \leq x, X > 2)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

- *Calcolo di* $\mathbb{P}(X^2 \leq x, X \leq 2)$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$. Se $x \leq 0$ allora $\mathbb{P}(X^2 \leq x, X \leq 2) = 0$ dato che X^2 non può essere minore o uguale di x. Sia dunque $x > 0$, allora otteniamo
$$\mathbb{P}\big(X^2 \leq x, X \leq 2\big) \;=\; \mathbb{P}\big(X \leq \sqrt{x}, X \leq 2\big) \;=\; \mathbb{P}\big(X \leq \min(\sqrt{x}, 2)\big) \;=\; F_X(\min(\sqrt{x}, 2)).$$

- *Calcolo di* $\mathbb{P}(5 \leq x, X > 2)$, *per ogni* $x \in \mathbb{R}$. Se $x < 5$ allora $\mathbb{P}(5 \leq x, X > 2) = 0$. Se invece $x \geq 5$ otteniamo
$$\mathbb{P}\big(5 \leq x, X > 2\big) \;=\; \mathbb{P}(X > 2) \;=\; 1 - F_X(2).$$

In conclusione
$$F_Y(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ F_X(\min(\sqrt{x}, 2)), & 0 \leq x < 5, \\ F_X(\min(\sqrt{x}, 2)) + 1 - F_X(2), & x \geq 5 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ F_X(\sqrt{x}), & 0 \leq x \leq 4, \\ F_X(2), & 4 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 \leq x \leq 4, \\ 1 - \frac{1}{2}, & 4 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

Esercizio 4

Un'urna contiene inizialmente otto palline, tre rosse e cinque blu. Due giocatori, A e B, effettuano delle estrazioni successive con le seguenti regole:

- se la pallina estratta è blu, viene reinserita nell'urna insieme a due palline rosse;
- se la pallina estratta è rossa, non viene reinserita nell'urna; inoltre si toglie dall'urna un'altra pallina rossa, in modo tale che nell'urna ci siano due palline rosse in meno;
- il gioco termina quando nell'urna c'è una pallina rossa (vince il giocatore A) oppure quando ci sono sette palline rosse (vince il giocatore B).

Il gioco può essere descritto da una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ in cui

$$X_n = \text{“n}^\text{o} \text{ di palline rosse presenti nell'urna dopo } n \text{ estrazioni”}, \qquad n \geq 1,$$

mentre X_0 è pari al numero di palline rosse presenti inizialmente nell'urna.

1) Determinare spazio degli stati e matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

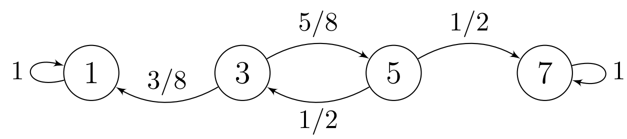
2) Quali sono le classi comunicanti?

3) Sapendo che dopo dodici estrazioni nell'urna ci sono tre palline rosse, qual è la probabilità che B vinca entro al massimo tre estrazioni?

4) Qual è la probabilità che A vinca entro al massimo quattro estrazioni?

1) $\mathcal{S} = \{1, 3, 5, 7\}$,

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2) $\{1\}$, $\{3, 5\}$, $\{7\}$.

3) Dobbiamo calcolare $\pi_{37}^{(3)}$ (si noti che non ha alcuna rilevanza sapere che sono già state effettuate dodici estrazioni, ovvero $n = 12$, dato che la catena di Markov è *omogenea*). A partire dal grafo orientato, abbiamo che

$$\pi_{37}^{(3)} = \underbrace{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}_{\text{prob. cammino } 3 \to 5 \to 7 \to 7} = \frac{5}{16}.$$

4) Dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(X_4 = 1)$. Sappiamo che $X_0 = 3$, quindi

X_0	1	3	5	7
p_{X_0}	0	1	0	0

Inoltre, sappiamo che

$$\mathbb{P}(X_4 = 1) = \sum_{i=1,3,5,7} p_{X_0}(i)\, \pi_{i1}^{(4)} = \pi_{31}^{(4)}.$$

Abbiamo dunque che

$$\pi_{31}^{(4)} = \underbrace{\frac{3}{8} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{prob. cammino } 3 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1} + \underbrace{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot 1}_{\text{prob. cammino } 3 \to 5 \to 3 \to 1 \to 1} = \frac{63}{128}.$$

Quindi $\mathbb{P}(X_4 = 1) = \frac{63}{128}$.