ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Università di Bologna - Scuola di Scienze

Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica
8 gennaio 2020

Esercizio 1

Consideriamo due cassetti di una scrivania, A e B. Il cassetto A contiene sei monete: due d'oro, una d'argento e tre di rame. Il cassetto B contiene invece cinque monete, di cui una d'oro, due d'argento e due di rame. Si sceglie casualmente un cassetto tra A e B e si pescano casualmente da esso due monete. Calcolare la probabilità che

1) le due monete pescate siano di rame, sapendo che il cassetto scelto è B;

2) le due monete pescate siano di rame;

3) le due monete pescate siano fatte dello stesso metallo;

4) le due monete pescate provengano dal cassetto A, sapendo che sono fatte dello stesso metallo.

Soluzione

Introduciamo gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“il cassetto scelto è } A\text{”}, \\ B &= \text{“il cassetto scelto è } B\text{”} \;=\; A^c, \\ E_o &= \text{“le due monete pescate sono d'oro”}, \\ E_a &= \text{“le due monete pescate sono d'argento”}, \\ E_r &= \text{“le due monete pescate sono di rame”}. \end{aligned}$$

1) $\mathbb{P}(E_r|B) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$.

2) Per la formula delle probabilità totali, abbiamo che

$$\mathbb{P}(E_r) \;=\; \mathbb{P}(E_r|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E_r|B)\,\mathbb{P}(B) \;=\; \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{3}{20}.$$

3)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_o) &= \mathbb{P}(E_o|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E_o|B)\,\mathbb{P}(B) \;=\; \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{30}, \\ \mathbb{P}(E_a) &= \mathbb{P}(E_a|A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(E_a|B)\,\mathbb{P}(B) \;=\; 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{20}, \\ \mathbb{P}(E_o \cup E_a \cup E_r) &= \mathbb{P}(E_o) + \mathbb{P}(E_a) + \mathbb{P}(E_r) \;=\; \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

4) Per la formula di Bayes

$$\mathbb{P}(A|E_o \cup E_a \cup E_r) \;=\; \frac{\mathbb{P}(E_o \cup E_a \cup E_r|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(E_o \cup E_a \cup E_r)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(E_o \cup E_a \cup E_r|A)\,\frac{1}{2}}{\frac{7}{30}}.$$

Essendo E_o, E_a, E_r eventi disgiunti, per la proprietà di additività della probabilità condizionale, abbiamo che

$$\mathbb{P}(E_o \cup E_a \cup E_r|A) \;=\; \mathbb{P}(E_o|A) + \mathbb{P}(E_a|A) + \mathbb{P}(E_r|A) \;=\; \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} + 0 + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} \;=\; \frac{4}{15}.$$

In conclusione, $\mathbb{P}(A|E_o \cup E_a \cup E_r) = \frac{4}{7}$.

Esercizio 2

Siano X e Y due variabili aleatorie discrete con densità discreta congiunta descritta dalla seguente tabella:

$X \setminus Y$	0	1	2
-1	0.1	0.05	0.05
0	0.3	0	0.05
1	0.1	0.05	0.3

1) Determinare le densità marginali.

2) X e Y sono indipendenti?

3) Calcolare $\mathbb{E}[X+Y]$, $\mathbb{E}[XY]$ e $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

4) Siano $U = |X| - Y$ e $V = XY$. Determinare densità discreta congiunta e densità marginali di U e V.

Soluzione

1)

$X \backslash Y$	0	1	2	p_X
-1	0.1	0.05	0.05	0.2
0	0.3	0	0.05	0.35
1	0.1	0.05	0.3	0.45
p_Y	0.5	0.1	0.4	1

2) No, infatti ad esempio $p_{(X,Y)}(0,1) \neq p_X(0)\, p_Y(1)$.

3)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_i x_i\, p_X(x_i) = 0.25, \\
\mathbb{E}[Y] &= \sum_j y_j\, p_Y(y_j) = 0.9, \\
\mathbb{E}[X+Y] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 1.15, \\
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{(X,Y)}(x_i, y_j) = 0.5, \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] = 0.275.
\end{aligned}
$$

4)

$U \backslash V$	-2	-1	0	1	2	p_U
-2	0	0	0.05	0	0	0.05
-1	0.05	0	0	0	0.3	0.35
0	0	0.05	0.3	0.05	0	0.4
1	0	0	0.2	0	0	0.2
p_V	0.05	0.05	0.55	0.05	0.3	1

Esercizio 3

Sia X una variabile aleatoria continua con densità

$$f_X(x) \ = \ \begin{cases} a\,x + b, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{altrove}, \end{cases}$$

dove a e b sono due parametri reali.

1) Dire per quali valori dei parametri a e b la funzione f_X è effettivamente una densità continua.

D'ora in avanti siano $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$.

2) Calcolare $\mathbb{E}[X]$.

3) Determinare la funzione di ripartizione di X.

4) Posto $Y = \sqrt{X}$, trovare la funzione di ripartizione di Y.

SOLUZIONE

1) Per tutte le coppie di numeri reali a e b che verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2a + 2b = 1, \\ b \geq 0, \\ 2a + b \geq 0. \end{cases}$$

Infatti, f_X è una densità continua se e solo se

- $f_X(x) \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

La seconda proprietà è verificata se e solo se $2a + 2b = 1$, infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^2 (a\,x + b)\,\mathrm{d}x \;=\; 2a + 2b.$$

Per quanto riguarda la prima proprietà, poiché f_X è una funzione lineare, è sufficiente verificare che sia positiva nei punti estremi 0 e 2, cioè

$$b \;\geq\; 0 \qquad \text{e} \qquad 2a + b \;\geq\; 0.$$

2)

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{4}{3}.$$

3)

$$F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{1}{4}\,x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

4) La funzione di ripartizione di Y è data da

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\big(\sqrt{X} \leq x\big).$$

Quindi, se $x \leq 0$ l'evento $\sqrt{X} \leq x$ ha probabilità nulla, dunque $F_Y(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$. Se invece $x \geq 0$, otteniamo

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\big(X \leq x^2\big) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{4}\,x^4, & 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 1, & x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\big(X \leq x^2\big) \;=\; \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{1}{4}\,x^4, & 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 1, & x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si consideri un modello elementare per le previsioni meteorologiche, in cui per semplicità si assumono solo tre possibili condizioni del tempo: *sereno*, *nuvoloso*, *pioggia*. Il modello è descritto sinteticamente come segue:

- se un giorno piove, il successivo piove nel 20% dei casi, altrimenti se il tempo cambia allora è sereno con probabilità del 50%;

- se un giorno non piove, il successivo il tempo rimane invariato con probabilità pari a 1/2, altrimenti se si verifica un cambiamento allora piove nel 40% dei casi.

Tale modello può essere descritto tramite una catena di Markov a tempo discreto $(X_n)_{n\geq 1}$, omogenea e a stati finiti.

1) Determinare la matrice di transizione e disegnare il corrispondente grafo orientato.

2) Determinare le classi comunicanti.

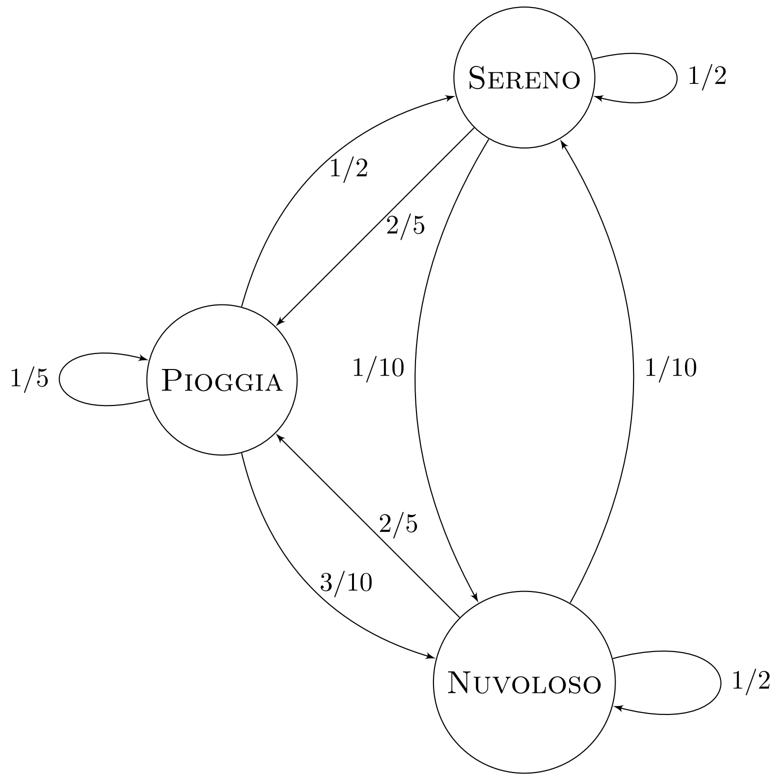
3) Se oggi è sereno, qual è la probabilità che piova tra due giorni?

4) Se oggi è sereno, qual è la probabilità che piova almeno una volta nei prossimi due giorni?

Soluzione

1) Sia $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ lo spazio degli stati, dove 1 indica *sereno*, 2 sta per *nuvoloso* e 3 per *pioggia*.

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$



2) Esiste un'unica classe comunicante, cioè $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$, quindi la catena di Markov è irriducibile.

3) Viene richiesto di calcolare $\pi_{13}^{(2)}$. Dato che non ci sono elementi nulli nella matrice di transizione Π, tutti i cammini da 1 a 3 in due passi sono possibili. Quindi

$$\pi_{13}^{(2)} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{prob. cammino } 1 \to 1 \to 3} + \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{prob. cammino } 1 \to 2 \to 3} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}}_{\text{prob. cammino } 1 \to 3 \to 3} = \frac{8}{25}.$$

4) La probabilità che dobbiamo calcolare è la somma delle probabilità dei seguenti cammini: $1 \to 3 \to 1$, $1 \to 3 \to 2$, $1 \to 3 \to 3$, $1 \to 1 \to 3$, $1 \to 2 \to 3$. In altri termini, è la somma delle probabilità dei cammini che transitano almeno una volta per lo stato 3. Quindi, tale probabilità è pari a

$$\underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{prob. cammino } 1 \to 3 \to 1} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10}}_{\text{prob. cammino } 1 \to 3 \to 2} + \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}}_{\text{prob. cammino } 1 \to 3 \to 3}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{prob. cammino } 1 \to 1 \to 3} + \underbrace{\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{prob. cammino } 1 \to 2 \to 3} = \frac{16}{25}.$$